ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1993 (179) Естественные науки

Математика

УДК 517.26

Г.В. БАДАЛЯН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ОБЩИХ ФОРМУЛ ТЕЙЛОРОВСКОГО ТИПА

В статье получен новый тип обобщения формулы Тейлора. Результат и метод его получения отличны от ранее известных.

Вопрос обобщения формулы Тейлора приобрел особую актуальность в связи с представлением функций квазианалитических классов аналогами классического ряда Тейлора, названного нами квазистепенным рядом, а следовательно, и представлением функций посредством общих факториальных рядов.

В указанных представлениях речь идет соответственно о разложениях

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\Omega_k^{\varkappa}(x-a),\quad x\in(a,b),\quad -\infty<a<b<\infty, \tag{1}$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z\prod\limits_{\nu=1}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)},\quad \mathrm{Re}\,z\geqslant\sigma>0,\quad \prod_{\nu=1}^{0}(\cdot)=1, \tag{2}$$

где

$$\Omega_k^{\varkappa}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\frac{e^{\zeta x}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\nu=1}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)},\quad x\in[0,\infty),\quad \varkappa>0, \tag{3}$$

$$\gamma_0=0,\ \gamma_\nu\geqslant 0,\ \nu=1,2,\cdots,\ k=0,1,2,\cdots,$$

см. [1,2].

Формула (1) при замене $x=\ln t$ и $\gamma_\nu=\nu$, $\nu=0,1,\cdots$, превращается в обычную формулу Тейлора.

Впоследствии появилось стремление обобщить формулы, порождающие ряды (1) и (2).

Наиболее общие результаты были получены в работе [3], где функции (3) заменены функциями

$$\Omega_k^*(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{\xi x}d\xi}{\xi\prod_{\nu=1}^{k}(\widetilde{\mu}_\nu(\xi)+\gamma_\nu)} \qquad (3')$$

с последовательностью $\{\widetilde{\mu}_\nu(\xi)\}$, подчиненной некоторым довольно общим условиям. Следовательно, оказывается возможным получение рядов более общих, чем (1) и (2) (см.[3] и приведенную там библиографию, а также [4], где получены более общие формулы).

В настоящей работе развивается метод работы [3] для новой ситуации, и оказывается, что возможности применения этого метода широкие.

Напр., разложение можно произвести и по системе функций типа (3'), когда $\{\widetilde{\mu}_\nu(\xi)+\gamma_\nu\}$ заменяются $\{\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)\}$.

В работе центральное место занимает получение формул тейлоровского типа на основе системы фучкций $\{\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)\}$, рассматривается также применение получаемых формул, в частности, по вопросу разложимости функций в факториальные ряды вида

$$\sum\frac{a_k}{\prod_{\nu=1}^{k}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}.$$

Определение 1. Функция $u(t)\in J$, если

1) при $\operatorname{Re} z>0$ существует

$$\int_0^\infty|e^{-zt}u(t)dt \quad \text{и} \quad \int_0^\infty e^{-zt}u(t)dt=\mu(z)\not\equiv\frac{1}{z}; \qquad (4)$$

2) функция $\widetilde{\mu}(z)=z\mu(z)$ — аналитическая в области $|\arg z|<\frac{\pi}{2}\beta$, $1<\beta<2$, и там в нуль не обращается;

3) $|z\mu(z)|^{-1}=O(|z|^{-\delta})$, $\delta>0$, $z\to\infty$, $|\arg z|<\frac{\pi}{2}\beta$.

Замечание 1. Из определения 1 следует, что не исключен и тот случай, когда $u(t)$ — обобщенная функция в том исходном понимании, что $u(t)=0$ при $t>0$, однако

$$\int_0^\infty e^{-zt}u(t)dt=\mu(z)\equiv 1.$$

Рассмотрим удовлетворяющую определению 1 последовательность функций $\{u_k(t)\}\subset J$ и ассоциированную с ней последовательность $\{\mu_k(z)\}$. Обозначим

$$\widetilde{\mu}_k(z)=z\mu_k(z), \qquad k=1,2,..., \tag{5}$$

$$\Omega_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi x}d\xi}{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}, \quad \Omega_k^*(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi x}d\xi}{\xi\prod\limits_{\nu=1}^{k}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}, \tag{6}$$

$$\gamma_\nu=\mathrm{Re}\gamma_\nu\geqslant 0, \ x>0, \ \sigma>0, \ \prod_{\nu=k}^{k-1}(\cdot)=1.$$

$$\widetilde{J}_m\varphi(x)=\int_a^x\widetilde{u}_m(x,t)\varphi(t)dt, \tag{7}$$

где

$$\widetilde{u}_m(x,t)=u_m(x-t)e^{(\gamma_m-\gamma_{m-1})t}, \tag{8}$$

$$L^0\varphi(x)=\varphi(x), \quad L^k\varphi(x)=\frac{d}{dx}\widetilde{J}_kL^{k-1}\varphi(x), \quad k=1,2,\cdots. \tag{9}$$

Замечание 2. Особо выделим случай, когда

$$u_k(t)=\frac{t^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}, \qquad 0<\alpha_k<1, \quad k=1,2,\cdots,$$

а также его предельный случай, когда $\alpha_k\to 0$, т.е. когда $u_k(t)$ — обобщенная функция (Δ - функция).

В первом случае имеем

$$\mu_k(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_0^\infty e^{-zt}t^{\alpha_k-1}dt=\frac{1}{z^{\alpha_k}},$$

$$\text{а} \quad \widetilde{\mu}_k(z)=z\mu_k(z)=z^{1-\alpha_k}=z^{1/\rho_k}, \qquad \frac{1}{\rho_k}=1-\alpha_k.$$

В этом случае

$$\Omega_k^*(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi x}d\xi}{\xi\prod\limits_{\nu=1}^{k}(\xi+\gamma_\nu)^{1/\rho_\nu}}, \qquad \Omega_k(x)=\frac{d\Omega_k^*(x)}{dx}. \tag{6'}$$

Во втором случае ($\alpha_k\to 0$) $\mu_k(z)\equiv 1$, а $\widetilde{\mu}_k(z)=z$, поэтому

$$\Omega_k^*(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi x}d\xi}{\xi\prod\limits_{\nu=1}^{k}(\xi+\gamma_\nu)} \quad \left(\Omega_k(x)=\frac{d\Omega_k^*(x)}{dx}\right).$$

Определение 2. Функция $\varphi\in C_n(a,b)$, если
1) существуют $L^k\varphi(x)\in L^1(a,b)\cap C(a,b)$, $k=0,1,2,\cdots,n$;
2) существуют

$$\lim_{t\to a+} e^{-\gamma_k t}\widetilde{J}_k L^{k-1}\varphi(t)=a_k, \qquad k\geq 1. \tag{10}$$

Замечание 3. Класс функций $C_n(a,b)$ не пуст: напр., $\Omega_m(x-a)\in C_\infty(a,b)$, притом

$$\widetilde{J}_k L^{k-1}\Omega_m(x-a)\big|_{x=a}=\delta_{k,m}, \qquad \delta_{k,m}=\begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m.\end{cases}$$

Действительно, для простоты положим $a=0$, тогда

$$L'\Omega_m(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x u_1(x-t)e^{\gamma_1 t}\Omega_m(t)dt=\frac{d}{dx}\int_0^x u_1(t)e^{\gamma_1(x-t)}\cdot$$

$$\cdot\,\Omega_k(x-t)dt=\frac{d}{dx}\int_0^\infty u_1(t)e^{\gamma_1 x}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi x}e^{-(\xi+\gamma_1)t}d\xi}{\prod_{\nu=1}^{k}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}dt \quad (\gamma_0=0).$$

Это потому, что $\Omega_k(x-t)=0$, если только $t>x$. Это значит, что

$$L'\Omega_m(x)=\frac{d}{dx}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{(\xi+\gamma_1)x}d\xi}{\prod_{\nu=1}^{m}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}\int_0^\infty u_1(t)e^{-(\xi+\gamma_1)t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dx}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{(\xi+\gamma_1)x}\mu_1(\xi+\gamma_1)}{\prod_{\nu=1}^{m}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}d\xi=\frac{d}{dx}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{(\xi+\gamma_1)x}d\xi}{(\xi+\gamma_1)\prod_{\nu=2}^{m}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)},$$

так как $\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)=(\xi+\gamma_\nu)\,\mu_\nu(\xi+\gamma_\nu)$.
Очевидно, что

$$\widetilde{J}_1\Omega_m(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{(\xi+\gamma_1)x}d\xi}{(\xi+\gamma_1)\prod_{\nu=2}^{m}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}\Bigg|_{x=0}=0,$$

если только $m>1$ и равняется 1, если $m=1$ $\left(\prod_{\nu=2}^{1}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)=1\right)$.

Продолжая процесс применения оператора L^k, придем к тому, что получим

$$\widetilde{J}_k L^{k-1}\Omega_m(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{(\xi+\gamma_k)x}d\xi}{(\xi+\gamma_k)\prod\limits_{\nu=k+1}^{m}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)},$$

где $\prod\limits_{\nu=k+1}^{m}(\cdot)=1$, если $k+1>m$.

Очевидно, что

$$\widetilde{J}_k L^{k-1}\Omega_m(x)\Big|_{x=0}=\begin{cases}0, & \text{если } k<m,\\ 1, & \text{если } k=m.\end{cases}$$

Если $k=m$, то очевидно $L^m\Omega_m(x)=0$, а следовательно, и $L^l\Omega_m(x)=0$ для всякого целого $l\geqslant m$; равны нулю также

$\widetilde{J}_{l+1}L^l\Omega_m(x)$, если $l\geqslant m$.

Теорема 1. Всякая функция $\psi(x)$, для которой $\psi'(x)\in C_n(a,b)$, имеет представление

$$\psi(x)=\psi(a)+\sum_{k=1}^{n}a_k\Omega_k^*(x-a)+R_n^*(\psi,x),\qquad x\in(a,b),\tag{11}$$

где

$$R_n^*(\psi,x)=\int\limits_a^x\Omega_n^*(x-t)e^{-\gamma_n t}L^n\psi'(t)dt,\tag{12}$$

$$a_k=e^{-\gamma_k a}\lim_{t\to a+}\widetilde{J}_k L^{k-1}\psi'(t),\qquad k=1,2,\cdots,n.\tag{13}$$

Доказательство. Имеем

$$R_k^*(\psi,x)=\int\limits_a^x\Omega_k^*(x-t)e^{-\gamma_k t}L^k\psi'(t)dt,\qquad 1\leqslant k\leqslant n,\tag{14}$$

откуда интегрированием по частям, зная, что $\Omega_k^*(0)=0$, $k\geqslant 1$, будем иметь

$$R_k^*(\psi,x)=\widetilde{J}_k L^{k-1}\psi'(t)\,\Omega_k^*(x-t)e^{-\gamma_k t}\Bigg|_{t=a}^{x}-\int\limits_a^x\frac{\partial\Omega_k^*(x-t)e^{-\gamma_k t}}{\partial t}\widetilde{J}_k L^{k-1}\psi'(t)dt,$$

т.е.

$$R_k^*(\psi,x)=-a_k\Omega_k^*(x-a)+\int\limits_a^x\hat{\Omega}_k(x,-t)\widetilde{J}_k L^{k-1}\psi'(t)dt,\tag{14'}$$

где

$$\hat{\Omega}_k(x,-t)=-\frac{\partial}{\partial t}(\Omega_k^*(x-t)e^{-\gamma_k t})=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi x}e^{-(\xi+\gamma_k)t}d\xi}{\xi\prod\limits_{\nu=1}^{k}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}=\frac{e^{-\gamma_k t}}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi(x-t)}(\xi+\gamma_k)}{\xi\prod\limits_{\nu=1}^{k}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}d\xi.\tag{15}$$

$$Y_k(x)=\int_a^x \hat{\Omega}_k(x,-t)\widetilde{J}_k L^{k-1}\psi'(t)dt=$$

$$=\int_a^x \hat{\Omega}_k(x,-t)dt\int_a^t u(t-\tau)e^{(\gamma_k-\gamma_{k-1})\tau}L^{k-1}\psi'(\tau)d\tau=$$

$$=\int_a^x e^{(\gamma_k-\gamma_{k-1})\tau}L^{k-1}\psi'(\tau)d\tau\int_\tau^x u(t-\tau)\hat{\Omega}_k(x,-t)dt. \qquad (16)$$

Отдельно вычислим $A_k(x,\tau)=\int_\tau^x u_k(t-\tau)\hat{\Omega}_k(x,-t)dt$.

После замены $t-\tau=t'$, получаем

$$A_k(x,\tau)=\int_0^{x-\tau} u_k(t)\hat{\Omega}_k(x,-\tau-t)dt=\int_0^\infty u_k(t)\hat{\Omega}_k(x,-\tau-t)dt. \qquad (17)$$

Это потому, что $\hat{\Omega}_k(x,-\tau-t)=0$, $k\geqslant 1$, если только $t>x-\tau$.
Это значит, что

$$A_k(x,\tau)=\int_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(\xi+\gamma_k)e^{\xi(x-\tau-t)}e^{-\gamma_k(\tau+t)}d\xi}{\xi\prod_{\nu=1}^{k}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}u_k(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(\xi+\gamma_k)e^{\xi(x-\tau)}e^{-\gamma_k\tau}}{\xi\prod_{\nu=1}^{k}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}d\xi\int_0^\infty e^{-(\xi+\gamma_k)t}u_k(t)dt=$$

$$=\frac{e^{-\gamma_k\tau}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi(x-\tau)}(\xi+\gamma_k)\mu_k(\xi+\gamma_k)}{\xi\prod_{\nu=1}^{k}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}d\xi, \qquad (17')$$

так как $\int_0^\infty e^{-(\xi+\gamma_k)t}u_k(t)dt=\mu_k(\xi+\gamma_k)$.

Из (17′) в силу равенства $\widetilde{\mu}_k(\xi+\gamma_k)=(\xi+\gamma_k)\,\mu_k(\xi+\gamma_k)$ получаем, что

$$A_k(x,\tau)=\frac{e^{-\gamma_k\tau}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi(x-\tau)}d\xi}{\xi\prod_{\nu=1}^{k-1}\widetilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}=e^{-\gamma_k\tau}\Omega^*_{k-1}(x-\tau). \qquad (17'')$$

В результате из (16) получаем, что

$$Y_k(x)=\int_a^x e^{-\gamma_{k-1}\tau}L^{k-1}\psi'(\tau)\Omega^*_{k-1}(x-\tau)d\tau=R^*_{k-1}(\psi,\tau). \qquad (16'')$$

Возвращаясь к (14'), имеем

$$R^*_k(\psi,x)=-a_k\Omega^*_k(x-a)+Y_k(x)=-a_k\Omega^*_k(x-a)+R^*_{k-1}(\psi,x),$$

откуда следует, что

$$R^*_{k-1}(\psi,x)=a_k\Omega^*_k(x-a)+R^*_k(\psi,x). \qquad (14'')$$

Придадим k значения $1,2,\cdots,n$ и просуммируем получаемые равенства. Будем иметь

$$R^*_0(\psi,x)=\sum_{k=1}^n a_k\Omega^*_k(x-a)+R^*_n(\psi,x). \qquad (18)$$

Заметим, наконец, что из $R_0(\psi,x)=\int_a^x\Omega^*_0(x-t)e^{-\gamma_0 t}L^0\psi'(t)dt$,

где $\quad \Omega^*_0(x-t)=1,\ e^{-\gamma_0 t}=1,\ (\gamma_0=0),\ L^0\psi'(t)=\psi'(t)$,
будем иметь $R^*_0(\psi,t)=\psi(x)-\psi(a)$.

Из (18), согласно последнему равенству, следует утверждаемое теоремой 1 равенство (11).
Теорема 1 доказана.

Следствие теоремы 1. Всякая функция $\psi(x)$, для которой $\psi'(x)\in C_n(a,b)$, где функции $u_k(t)$ определяются как

$$u_k(t)=\frac{t^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)},\quad \text{где}\quad 0<\alpha_k<1,\ t>0, \qquad (19)$$

имеет представление (11), где

$$\Omega^*_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi x}d\xi}{\xi\prod_{\nu=1}^k(\xi+\gamma_\nu)^{1/\rho_\nu}},\quad \frac{1}{\rho_\nu}=1-\alpha_\nu,\ \sigma>0,$$

так как

$$\mu_\nu(z+\gamma_\nu)=\frac{1}{(z+\gamma_\nu)^{\alpha_\nu}},\quad \tilde{\mu}_\nu(z+\gamma_\nu)=(z+\gamma_\nu)\mu_\nu(z+\gamma_\nu)=(z+\gamma_\nu)^{1-\alpha_\nu}=(z+\gamma_\nu)^{1/\rho_\nu},$$

$R^*_n(\psi,x)$, a_k определяются, как в (12) и (13) соответственно, но составленные для системы функций (19).

Из теоремы I вытекает следующая ее разновидность.

Теорема 1'. Всякая функция $\varphi\in C_n(a,b)$ имеет представление

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\Omega_k(x-a)+R_n(\varphi,x), \qquad (11')$$

где
$$\Omega_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi x}d\xi}{\prod_{\nu=1}^{k}\tilde{\mu}_\nu(\xi+\gamma_\nu)}, \quad \sigma>0,$$

$$a_k=e^{-\gamma_k a}\lim_{t\to a+}\tilde{J}_k L^{k-1}\varphi(t), \quad k=1,2,\cdots,n, \qquad (12')$$

$$R_n(\varphi,x)=\int_a^x\Omega_n(x-a)e^{-\gamma_n t}L^n\varphi(t)dt. \qquad (13')$$

Для доказательства теоремы достаточно продифференцировать равенство (11) и ввести обозначение $\psi'(t)=\varphi(t)$.

Следствие теоремы 1'. Всякая функция $\varphi\in C_n(a,b)$, где функции $u_k(t)$ определены по (19), имеет представление (11'), где

$$\Omega_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi x}d\xi}{\prod_{\nu=1}^{k}(\xi+\gamma_\nu)^{1/\rho_\nu}}, \quad \sigma>0,$$

a_k и $R_n(\varphi,x)$ определяются по (12') и (13') для функций $u_k(t)$ из (19).

Перейдем теперь к некоторым применениям теоремы I'. Для простоты ограничимся случаем (19) определения последовательности функций $\{u_k(t)\}$.

Определение 2. Определенная на (a,b) функция

$$\varphi\in\tilde{C}_{\{M_n(\kappa)\}}(a,b), \quad u_k(t)=t^{\alpha_k-1}/\Gamma(\alpha_k), \quad 0<\alpha_k<1, \quad 1-\alpha_k=\frac{1}{\rho_k}, \qquad (20)$$

$$0<M_n(\kappa)\leqslant c\prod_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu+\kappa)^{1/\rho_\nu}, \quad \kappa\geqslant 0, \quad \rho\geqslant 1, \quad n=1,2,\cdots, \qquad (21)$$

$$\gamma_\nu=\mathrm{Re}\,\gamma_\nu\geqslant 0, \qquad \nu=1,2,\cdots,$$

если 1) она непрерывна на (a,b); 2) существуют функционалы $L^n\varphi(x)$, $n=1,2,\cdots$, и удовлетворяются неравенства

$$e^{-\gamma_n x}|L^n\varphi(x)|\leqslant c\prod_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu+\kappa)^{1/\rho_\nu}, \quad \kappa\geqslant 0, \quad n=1,2,\cdots, \qquad (22)$$

3) существуют

$$a_k=e^{-\gamma_k a}\lim_{t\to a+}\tilde{J}_k L^{k-1}\varphi(t), \quad k=1,2,\cdots,n. \qquad (12'')$$

Справедливо следующее предложение:

Теорема 2. Всякая функция $\varphi\in\widetilde{C}_{\{M_n(x)\}}(a,b)$, где $-\infty<a<b\leqslant+\infty$ и расходится ряд

$$\sum\frac{1}{\rho_\nu(\gamma_\nu+1)}=\infty, \tag{23}$$

имеет представление

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Omega_k(x-a), \tag{24}$$

где числа a_k определены в (12″), а

$$\Omega_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\xi x}d\xi}{\prod_{\nu=1}^{k}(\xi+\gamma_\nu)^{1/\rho_\nu}},\quad \sigma>0,\quad k=1,2,\cdots, \tag{20'}$$

притом сходимость равномерная на каждом компакте $K\subset[a,b)$.

Для доказательства нам следует оценить сверху модуль определенного по следствию теоремы 1′ $R_n(\varphi,x)$, когда $n\to\infty$, $x\in(a,b)$. Из (20′) следует, что при $a\leqslant t<x$

$$|\Omega_n(x-t)|\leqslant c\frac{e^{\sigma x}}{\prod_{\nu=1}^{n}(\sigma+\gamma_\nu)^{1/\rho_\nu}},\quad c=c(\sigma,a)>0,\quad \sigma>\kappa. \tag{25}$$

Для оценки сверху $|R_n(\varphi,x)|$, очевидно, имеем

$$|R_n(\varphi,x)|\leqslant\frac{ce^{\sigma x}}{\prod_{\nu=1}^{n}(\sigma+\gamma_\nu)^{1/\rho_\nu}}\int_a^x e^{-\gamma_n t}|L^n\varphi(t)|dt\leqslant$$

$$\leqslant c_1\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\kappa+\gamma_\nu}{\sigma+\gamma_\nu}\right)^{1/\rho_\nu}e^{\sigma x}(x-a)\leqslant c_2e^{\sigma' x}\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\kappa+\gamma_\nu}{\sigma+\gamma_\nu}\right)^{1/\rho_\nu},\quad \sigma'>\sigma>\kappa.$$

Это значит, что

$$|R_n(\varphi,x)|\leqslant c_0e^{\sigma_1 x}\exp\left(-(\sigma-\kappa)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(\sigma+\gamma_\nu)\rho_\nu}\right), \tag{26}$$

и $\lim_{n\to\infty}R_n(\varphi,x)=0$ равномерно, если только и $\sigma_1>\sigma>\kappa\geqslant0$, $x\in K\subset[a,b)$.

Теорема 2 позволяет доказать следующее:

Теорема 3. Для того чтобы аналитическая в $\operatorname{Re} z > \kappa \geqslant 0$ функция $f(z)$ разлагалась в сходящийся в $\operatorname{Re} z > \kappa$ обобщенный факториальный ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\prod_{\nu=1}^{k} (z+\gamma_\nu)^{1/\rho_\nu}}, \tag{27}$$

где $\gamma_\nu = \operatorname{Re}\gamma_\nu \geqslant 0$, $\rho_\nu \geqslant 1$, $\nu = 1,2,\cdots$, выполняется условие (23), достаточно, чтобы имело место представление

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \varphi(x)dx, \tag{28}$$

где $\varphi \in \tilde{C}_{\{M_n(\kappa)\}}(0,\infty)$.

Действительно, пусть $\varphi \in \tilde{C}_{\{M_n(\kappa)\}}(0,\infty)$, тогда для $f(z)$ из (28) имеем

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{\infty} e^{-zx} \Omega_k(x)dx + \int_0^{\infty} e^{-zx} R_n(\varphi,x)dx; \tag{28'}$$

откуда следует, что для

$$r_n(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} R_n(\varphi,x)dx,$$

согласно (26), имеем

$$|r_n(z)| \leqslant c \int_0^{\infty} e^{(\sigma - \operatorname{Re} z)x} dx \cdot \exp\left(-\delta \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(\sigma+\gamma_\nu)\rho_\nu}\right) <$$

$$< c' \exp\left(-\delta \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\rho_\nu(\sigma+\gamma_\nu)}\right), \tag{29}$$

если только $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma' > \sigma > \kappa$, $\delta = \sigma - \kappa$.

С другой стороны очевидно, что для функции $\Omega_k(x)$ имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} \Omega_k(x)dx = \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k} (z+\gamma_\nu)^{1/\rho_\nu}}.$$

Поэтому из (28') имеем $\quad f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\prod_{\nu=1}^{k} (z+\gamma_\nu)^{1/\rho_\nu}} + r_n(z),$

где, согласно (29) и (23), $\lim_{n\to\infty} r_n(z) = 0$ равномерно, если только $\operatorname{Re} z > \sigma > \kappa$.

Теорема 3 доказана.

Замечание 4. Аналог теоремы 1′ (а следовательно и теоремы 1) можно получить и тогда, когда производные (9) лиувилльского типа заменены на производные такой же конструкции, но вейловского типа, а именно:

$$\tilde{J}_m \varphi(x) = \int_x^b \tilde{u}_m(t,x)\varphi(t)dt,$$

где $\tilde{u}_m(t,x) = u_m(t-x)e^{(\gamma_m - \gamma_{m-1})x}$,

$$L^k \varphi(x) = \frac{d}{dx}\tilde{J}_k L^{k-1}\varphi(x)dx, \qquad k = 1,2,\cdots,$$

$$L^0\varphi(x) = \varphi(x).$$

В результате, при выполнении соответствующих условий, получаем представление такого вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k \Omega_k(b-x) + R_n(\varphi,x),$$

где $R_n(\varphi,x) = (-1)^n \int_x^b \Omega_n(t-x)e^{-\gamma_n t} L^n \varphi(t)dt,$

$$a_k = e^{-b\gamma_k} \lim_{t\to b-} \tilde{J}_k L^{k-1}\varphi(t).$$

Кафедра мат. анализа *Поступила 6.04.1992*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бадалян Г.В.** Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций. — ИАН Арм. ССР: Физ.-мат. науки, 1953, т.VI, № 5, с. 1-63.
2. **Бадалян Г.В.** Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций.— ИАН Арм.ССР: Физ-мат. науки, 1954, т.VII, № 1, с. 3-33.
3. **Бадалян Г.В.** К вопросу обобщений формулы Тейлора. —ДАН СССР, 1977, т.232, №2, с. 265-268.
4. **Бадалян Г.В.** Об одной формуле тейлоровского типа.— Уч. записки ЕГУ, 1990, №1, с.3-9.

Հ.Վ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

ԹԵՅԼՈՐՅԱՆ ՏԻՊԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԵՍՔԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ՍՏԱՑՄԱՆ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում շարադրվում է թեյլորյան տիպի ընդհանուր տեսքի բանաձևերի ստացման մի նոր մեթոդ:

Ֆունկցիաների դիֆերենցիալ հատկությունները բնութագրվում են կոտորակային Լիուվիլի տիպի, ինչպես նաև հեղինակի կողմից ներմուծված ընդհանրացված ածանցյալների զուգորդման միջոցով:

Ստացված արդյունքները էապես տարբեր են նախորդ հայտնի արդյունքներից:

G.V. BADALIAN

ON A METHOD OF RECEPTION OF TAYLOR TYPE GENERAL FORMULAS

Summary

A new type of generalization of Taylor's formulas is received in this article. The result and the method of its reception are different from those known before.