ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1988 Естественные науки

Математика

УДК 517.518.862

Г. В. БАДАЛЯН, В. М. ЕДИГАРЯН

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МЕНДЕЛЕЕВА

В работе для квазиполиномов из обобщенной системы Мюнтца

$$P_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{m} x^{\lambda_k}\sum_{\nu=1}^{\mu_k-1} a_{k,\nu}(\ln x)^{\nu},$$

где

$$\mu_k\in N,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad \sum_{k=1}^{m}\mu_k=n,$$

решается задача об оценке коэффициентов $|a_{s,\nu}|$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu_s-1$ при условии $\|P_n\|_{L^2(0,1)}=M$. Найдено представление экстремального многочлена.

1. В 1889 году Д. И. Менделеевым была поставлена следующая задача: для многочлена

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, \tag{1}$$

где

$$\sup_{x\in[0,1]}|P(x)|\leqslant 1, \tag{2}$$

требуется оценить сверху $|a_k|$, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$.

Эта задача решена частично в работе [1] А. А. Марковым и полностью в [2] С. Н. Бернштейном.

Бернштейном доказан и найден экстремальный многочлен, а именно многочлен, в котором модули всех коэффициентов $a_k (k=0\ 1,\ \cdots,\ n)$ наибольшие (при условии (2)) и искомый многочлен—это

$$P(x)=\cos 2n(\arccos\sqrt{x}).$$

Методом, отличным от методов работ [1 и 2], аналогичная задача для квазиполиномов из системы Мюнтца

$$P_n(x)=a_1e^{-2\pi\gamma_1x}+\ldots+a_ne^{-2\pi\gamma_nx}, \tag{3}$$

где

$$0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots \tag{4}$$

и

$$\|P_n\|_{L^p(0,\ \infty)} < 1,\ P \geqslant 1, \tag{5}$$

решена Л. Шварцем в работе [3]. При этом для $p=2$ получены точные оценки, а для $p \neq 2$—асимптотически точные оценки.

В настоящей работе мы ставим более общую задачу, а именно рассматриваем квазимногочлен из обобщенной системы Мюнтца:

$$P_n(x)=a_0+a_{1,0}x^{\gamma_1}+a_{1,1}x^{\gamma_1}\ln x+\ldots+a_{1,\mu_1-1}x^{\gamma_1}(\ln x)^{\mu_1-1}+\ldots+$$

$$+a_{s,0}x^{\gamma_s}+a_{s,1}x^{\gamma_s}\ln x+\ldots+a_{s,\mu_s-1}x^{\gamma_s}(\ln x)^{\mu_s-1}+\ldots+$$

$$+a_{m,0}x^{\gamma_m}+a_{m,1}x^{\gamma_m}\ln x+a_{m,2}x^{\gamma_m}(\ln x)^2+\ldots+$$

$$+a_{m,\mu_m-1}x^{\gamma_m}(\ln x)^{\mu_m-1}, \tag{6}$$

где числа

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_m \in N,\ \mu_k \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{m}\mu_k=n. \tag{7}$$

Ставится задача оценить сверху $|a_{s,l_0}|$, $l_0=0,\ 1,\ \cdots,\ \mu_s-1$, когда

$$\|P_n\|_{L^2(01)}=M \text{ (можно положить } M=1). \tag{8}$$

Решение задачи дается путем нахождения экстремального квазиполинома.

Рассмотрим квазиполином

$$P_{n,s,l_0}(x)=\frac{1}{2\pi i\Gamma(l_0+1)}\int_C \prod_{\nu=0}^{m}\left(\frac{\zeta-\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\right)^{\mu_\nu}\frac{\sum\limits_{l=l_0}^{\mu_s-1}\alpha_{s,l}^{(l_0)}(\zeta-\gamma'_s)^l}{(\zeta-\gamma'_s)^{\mu_s}}x^{-\zeta}d\zeta, \tag{9}$$

где

$$x\in[0,\ 1],\ \gamma_0=0,\ \mu_0=1,\ \mu_\nu\geqslant 1,\ \sum_{\nu=1}^{m}\mu_\nu=n,\ \gamma'_s=\gamma_s+1,$$

а контур C охватывает окрестности точек $0, -\gamma_1, \cdots, -\gamma_m$, оставляя вне точки γ'_ν, числа $\alpha_{s,l}^{(l_0)}$ пока произвольные. Обозначим

$$J_{n,s,l_0,k,\nu}=\int_0^1 P_{n,s,l_0}(x)x^{\gamma'_k}(\ln x)^\nu dx,\quad \nu=0,1,\ \ldots,\ \mu_k-1$$

и потребуем, чтобы

$$J_{n,s,l_0,k,\nu}=\begin{cases}0, & k\neq s,\quad \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ \mu_k-1,\\ 0, & k=s,\quad \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ \mu_s-1,\ \gamma\neq l_0,\\ 1, & k=s,\quad \nu=l_0.\end{cases}$$

Пусть $k\neq s$, тогда

$$J_{n,s,l_0,k,\nu}=\frac{1}{2\pi i\Gamma(l_0+1)}\int_C\prod_{\nu=0}^{m}\left(\frac{\zeta-\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}\right)^{\mu_\nu}\frac{\sum\limits_{l=l_0}^{\mu_s-1}\alpha_{s,l}^{(l_0)}(\zeta-\gamma_\nu')^l}{(\zeta-\gamma_s')^{\mu_s}}\int_0^1 x^{-\zeta+\gamma_k'}(\ln x)^\nu dx.$$

После замены $x=e^{-t}$ будем иметь

$$\int_0^1 x^{-\zeta+\gamma_\nu'}(\ln x)^\nu dx=\int_0^\infty e^{\zeta t}e^{-\gamma_k' t}(-t)^\nu dt=\frac{(-1)^\nu\Gamma(\nu+1)}{(\gamma_k'-\zeta)^{\nu+1}}=$$

$$=-\frac{\Gamma(\nu+1)}{(\zeta-\gamma_k')^{\nu+1}},$$

если считать, что $\gamma_k'\geqslant\operatorname{Re}\zeta$.

Поэтому

$$J_{n,s\,l_0,k,\nu}=-\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i\Gamma(l_0+1)}\int_C\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{m}{}_s'(\zeta-\gamma_\nu')^{\mu_\nu}}{\prod\limits_{\nu=0}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)^{\mu_\nu}}\sum_{l=l_0}^{\mu_s-1}\alpha_{s,l}^{(l_0)}\frac{(\zeta-\gamma_\nu')^l}{(\zeta-\gamma_k')^{\nu+1}},\tag{10}$$

где

$$\prod_{\nu=0}^{m}{}_s'(\zeta-\gamma_\nu')^{\mu_\nu}=\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{m}(\zeta-\gamma_\nu')^{\mu_\nu}.$$

Из (10) следует, что при $k\neq s$, $\nu=0,1,\cdots,\mu_k-1$ подынтегральная функция не имеет особенностей вне области с контуром C, а в бесконечности убывает со скоростью не менее $O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$.

Следовательно,

$$J_{n,s,l_0,k,\nu}=0\qquad\text{при } k\neq s,\ \nu=0,1,\cdots,\mu_k-1.$$

Пусть теперь $k=s$. Различим три случая:

1) $0\leqslant\nu\leqslant l_0-1$, 2) $\nu=l_0$, 3) $l_0<\nu\leqslant\mu_s-1$.

В случае 1) из (10) следует, что подынтегральная функция вне области с границей C не имеет особенностей и убывает в бесконечности как $O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$. Следовательно, опять $J_{n,s,l_0,k,\nu}=0$, когда $0\leqslant\nu\leqslant l_0-1$.

2) Пусть теперь $k=s$, $\nu=l_0$. Из (10) имеем

$$J_{n,s,l_0,k,\nu}=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{m}{}_s'(\zeta-\gamma_\nu')^{\mu_\nu}}{\prod\limits_{\nu=0}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)^{\mu_\nu}}\alpha_{s,l_0}^{(l_0)}\frac{d\zeta}{\zeta-\gamma_s'}=$$

$$=\alpha_{s,l_0}^{(l_0)}\operatorname*{Res}_{\zeta=\gamma_s'}\frac{R_{n,s}(\zeta)}{\zeta-\gamma_s'}=\alpha_{s,l_0}^{(l_0)}A_{s,l_0}^{(l_0)},\tag{11}$$

где

$$R_{n,s}(\zeta)=\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{m}(\zeta-\gamma_\nu')^{\mu_\nu}:\prod_{\nu=0}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)^{\mu_\nu},\quad A_{s,l_0}^{(l_0)}=R_{n,s}(\gamma_s'). \tag{12}$$

3) Пусть наконец $k=s$, $l_0<\nu\leq\mu_s-1$. Тогда из (10) будем иметь

$$J_{n,s,l_0,s,\nu}=-\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(l_0+1)2\pi i}\int\limits_{C}R_{n,s}(\zeta)\sum_{l=l_0}^{\nu}\alpha_{s,l}^{(l_0)}\frac{(\zeta-\gamma_\nu')^l}{(\zeta-\gamma_\nu')^{\nu+1}}d\zeta=$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(l_0+1)}\cdot\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{C}R_{n,s}(\zeta)\sum_{l=l_0}^{\nu}\frac{\alpha_{s,l}^{(l_0)}}{(\zeta-\gamma_s')^{\nu-l+1}}d\zeta=$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(l_0+1)}\sum_{l=l_0}^{\nu}\alpha_{s,l}^{(l_0)}A_{s,l}^{(\nu)}, \tag{13}$$

где

$$A_{s,l}^{(\nu)}=\operatorname*{Res}_{\zeta=\gamma_s'}R_{n,s}(\zeta):(\zeta-\gamma_s')^{\nu-l+1}, \tag{14}$$

так как интеграл (13) равняется сумме вычетов подынтегральной функции относительно находящейся вне области с границей C, особой точки $\zeta=\gamma_s'$ с отрицательным знаком.

Потребуем выполнения условий

$$A_{s,l_0}^{(l_0)}\alpha_{s,l_0}^{(l_0)}=1$$

$$\sum_{l=l_0}^{\nu}A_{s,l}^{(\nu)}\alpha_{s,l}^{(l_0)}=0,\quad \nu=l_0+1,\ l_0+2,\ \dots,\ \mu_s-1. \tag{15}$$

Таким образом, в условиях (15) доказана

Теорема 1. В условиях (15) справедливы равенства

$$\int_0^1 P_{n,s,l_0}(x)x^{\gamma_k}(\ln x)^\nu dx=\begin{cases}0, & k\neq s,\\ 0, & k=s,\quad \nu\neq l_0,\\ 1, & k=s,\quad \nu=l_0,\end{cases} \tag{16}$$

Вычислим теперь

$$Y_{n,s,l_0}=\int_0^1 P_{n,s,l_0}(x)P_n(x)dx, \tag{17}$$

где $P_n(x)$ квазимногочлен из (6).

Согласно теореме 1 имеем

$$Y_{n,s,l_0}=\int_0^1 P_{n,s,l_0}(x)P_n(x)dx=a_{s,l_0}J_{n,s,l_0,s,l_0}=a_{s,l_0}. \tag{17'}$$

Из (17′) далее получаем

$$|a_{s,l_0}|\leq\|P_{n,s,l_0}\|_{L(0,1)}\|P_n\|_{L^2(0,1)}. \tag{18}$$

Значит,

$$|a_{s,l_0}|\leq M\cdot\|P_{n,s,l_0}\|_{L^2(0,1)}. \tag{18'}$$

Этим доказана.

Теорема 2. Для любого определенного в (6) квазиполинома $P_n(x)$, удовлетворяющего условию $\|P_n\|_{L^2(0,1)}=M$, справедливо неравенство (18′).

Это значит, что обобщенная задача Менделеева будет решена, если только удастся оценить $\| P_{n,s,l_0} \|_{L^2(0,1)}$.

Перейдем теперь к оценке $\|P_{n,s,l_0}\|_{L^2(0,1)}$, вернее говоря, нахождению $\| P_{n,s,l_0} \|_{L^2(0,1)}$.

Согласно (16) имеем

$$\| P_{n,s,l_0} \|^2_{L^2(0,1)}=\int_0^1 P_{n,s,l_0}(x)\, M_{n,s,l_0} x^{\gamma_s}(\ln x)^{l_0}dx, \tag{19}$$

где M_{n,s,l_0} —коэффициент $x^{\gamma_s}(\ln x)^{l_0}$ в квазиполиноме $P_{n,s,l_0}(x)$.

Но из (19) согласно (16) получаем, что

$$\| P_{n,s,l_0} \|^2_{L^2(0,1)}=M_{n,s,l_0}. \tag{19′}$$

Это одновременно значит, что в условиях (15) $M_{n,s,l_0}>0$.

Таким образом доказана.

Теорема 3. Для любого определенного в (6) квазиполинома $P_n(x)$ при $\|P_n\|_{L^2(0,1)}<M$ справедливы неравенства

$$|a_{s,l_0}|\leqslant M\sqrt{M_{n,s,l_0}}, \tag{19″}$$

где M_{n,s,l_0} —коэффициент при $x^{\gamma_s}(\ln x)^{l_0}$ в определенном в (9) квазиполиноме $P_{n,s,l_0}(x)$, числа $\alpha^{(l_0)}_{s,l}$ определены по (15).

Очевидно, что для нахождения M_{n,s,l_0} нам следует иметь численные значения $\alpha^{(l_0)}_{s,l}$, $l=l_0,\ l_0+1,\ \cdots,\ \mu_s-1$, т. е. решить систему уравнений (15).

Если представить определенную в (12) $R_{n,s}(\zeta)$ формулой Тейлора с центром разложения в точке $\zeta=\gamma_s'$, будем иметь

$$R_{n,s}(\zeta)=A_0+A_1(\zeta-\gamma_s')+A_2(\zeta-\gamma_s')^2+\ldots, \tag{20}$$

тогда, сравнивая (14) и (20), легко заметим, что

$$A^{(l_0)}_{s,l}=A_{\nu-l} \quad \nu\geqslant l,$$

и систему (15) перепишем в виде

$$\begin{gathered}
A_0\alpha^{(l_0)}_{s,l_0}=1,\\
A_1\alpha^{(l_0)}_{s,l_0}+A_0\alpha^{(l_0)}_{s,l_0+1}=0,\\
A_2\alpha^{(l_0)}_{s,l_0}+A_1\alpha^{(l_0)}_{s,l_0+1}+A_0\alpha^{(l_0)}_{s,l_0+2}=0,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
A_\nu\alpha^{(l_0)}_{s,l_0}+A_{\nu-1}\alpha^{(l_0)}_{s,l_0+1}+\ldots+A_0\alpha^{(l_0)}_{s,l_0+\nu}=0,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
A_{\mu_s-1}\alpha^{(l_0)}_{s,l_0}+A_{\mu_s-2}\alpha^{(l_0)}_{s,l_0+1}+\ldots+A_0\alpha^{(l_0)}_{s,\mu_s-1}=0.
\end{gathered} \tag{15′}$$

С другой стороны, если обозначить

$$\alpha^{(l_0)}_{s,l_0}=B_0,\quad \alpha^{(l_0)}_{s,l_0+1}=B_1,\ \ldots,\ \alpha^{(l_0)}_{s,l_0+\nu}=B_\nu,\ \ldots,\ \alpha^{(l_0)}_{s,\mu_s-1}=B_{\mu_s-1-l_0}, \tag{21}$$

то система (15′) перепишется в виде

$$\begin{gathered}A_0B_0=1,\\ A_1B_0+A_0B_1=0,\\ A_2B_0+A_1B_1+A_0B_2=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{\mu_s-1-l_0}B_0+A_{\mu_s-2-l_0}B_1+\ldots+A_0B_{\mu_s-1-l_0}=0.\end{gathered} \tag{15''}$$

Но числа A_ν, $\nu=0, 1, \ldots$ определяются из (20). Тогда из (15″) следует, что числа B_ν должны определяться из равенства

$$\tilde{R}_{n,s}(\zeta)=B_0+B_1(\zeta-\gamma_s')+B_2(\zeta-\gamma_s')^2+\cdots, \tag{22}$$

где

$$\tilde{R}_{n,s}(\zeta)=\frac{1}{R_{n,s}(\zeta)}. \tag{23}$$

Это значит, что

$$\alpha^{(l_0)}_{s,l_0+\nu}=B_\nu=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left.\frac{d^\nu\tilde{R}_{n,s}(\zeta)}{d\zeta^\nu}\right|_{\zeta=\gamma_s'},\quad \nu=0,1,\ \ldots,\ \mu_s-1-l_0. \tag{24}$$

После того как будут найдены числа

$$\alpha^{(l_0)}_{s,l_0}=B_0,\quad \alpha^{(l_0)}_{s,l_0+1}=B_1,\ \ldots\ \alpha^{(l_0)}_{s,\mu_s-1}=B_{\mu_s-1-l_0},$$

для нахождения M_{n,s,l_0} следует заметить, что при обозначении

$$\prod_{\nu=0}^{m}{}'_s\left(\frac{\zeta-\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}\right)^{\mu_\nu}\sum_{l=l_0}^{\mu_s-1}B_{l-l_0}(\zeta-\gamma_l')^l=Q(\zeta) \tag{25}$$

будем иметь

$$\sum_{\nu=0}^{\mu_s-1}M_{n,s,\nu}\,x^{\gamma_s}(\ln x)^\nu=\operatorname*{Res}_{\zeta=-\gamma_s}Q(\zeta)x^{-\zeta}=\frac{1}{\Gamma(\mu_s)}\lim_{\zeta\to-\gamma_s}\frac{d^{\mu_s-1}Q(\zeta)x^{-\zeta}}{d\zeta^{\mu_s-1}}= \tag{26}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu_s)}[M_{n,s,0}\,x^{\gamma_s}+M_{n,s,1}\,x^{\gamma_s}\ln x+\ldots+M_{n,s,l_0}x^{\gamma_s}(\ln x)^{l_0}+\ldots+$$

$$+\ldots+M_{n,s,\mu_s-1}x^{\gamma_s}(\ln x)^{\mu_s-1}]$$

где

$$M_{n,s,\nu}=\frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\mu_s)}\left.\frac{d^{\mu_s-1-\nu}Q(\zeta)}{d\zeta^{\mu_s-1-\nu}}\right|_{\zeta=-\gamma_s},\quad \nu=0,1,\ \ldots,\ \mu_s-1. \tag{27}$$

В частности

$$M_{n,s,l_0}=\frac{(-1)^{l_0}}{\Gamma(\mu_s)}\left.\frac{d^{\mu_s-1-l_0}Q(\zeta)}{d\zeta^{\mu_s-1-l_0}}\right|_{\zeta=-\gamma_s}, \tag{27'}$$

или, учитывая $\operatorname{sgn} M_{n,s,l_0}=1$, будем иметь

$$M_{n,s,l_0}=\frac{1}{\Gamma(\mu_s)}\left|\frac{d^{\mu_s-1-l_0}Q(\zeta)}{d\zeta^{\mu_s-1-l_0}}\right|_{\zeta=-\gamma_s}, \qquad (27'')$$

где $Q(\zeta)$ определена в (25).

Этим доказана

Теорема 4. Для любого определенного в (6) квазиполинома $P_n(x)$, удовлетворяющего условию $\|P_n\|_{L^2(0,1)}\leqslant M$, справедливы неравенства

$$|a_{s,l_0}|\leqslant M\cdot M_{n,s,l_0}^{\frac{1}{2}} l_0=0,\ 1,\ \cdots,\ \mu_s-1,\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ m, \qquad (28)$$

где M_{n,s,l_0} определено в (27''), $Q(\zeta)$—в (25), а входящие в (25) числа $\alpha_{s,\nu}^{(l_0)}=B_{l-l_0}$ — в (24).

Оценка точная, она достигается для функции

$$P_{n,s,l_0}(x):M_{n,s,l_0}^{\frac{1}{2}}=\widehat{P}_{n,s,l_0}(x). \qquad (29)$$

Очевидно, нам следует только заметить, что

$$\|\widehat{P}_{n,s,l_0}\|_{L^2(0,1)}=1.$$

В самом деле, согласно (19') и (29)

$$\|\widehat{P}_{n,s,l_0}\|_{L^2(0,1)}=\frac{1}{M_{n,s,l_0}^{\frac{1}{2}}}\|P_{n,s,l_0}\|_{L^2(0,1)}=\frac{M_{n,s,l_0}^{\frac{1}{2}}}{M_{n,s,l_0}^{\frac{1}{2}}}=1.$$

В заключение для иллюстрации вычислим M_{n,s,μ_s-1}. Согласно (10), (13) и (15) имеем

$$J_{n,s,s,\mu_s-1,\mu_s-1}=A_{s,\mu_s-1}\,\alpha_{s,\mu_s-1}^{(\mu_s-1)}=1, \qquad (10')$$

где

$$A_{s,\mu_s-1}=\operatorname*{Res}_{\zeta=\gamma_s'}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{m}{}'_{s}(\zeta-\gamma_\nu')^{\mu_\nu}}{\prod\limits_{\nu=0}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)^{\mu_\nu}}\,\frac{1}{\zeta-\gamma_s'}=\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{m}{}'_{s}(\gamma_s'-\gamma_\nu')^{\mu_\nu}}{\prod\limits_{\nu=0}^{m}(\gamma_s'+\gamma_\nu)^{\mu_\nu}},$$

и поэтому

$$\alpha_{s,\mu_s-1}^{(\mu_s-1)}=(\gamma_s'+\gamma_s)^{\mu_s}\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{m}\left(\frac{\gamma_s'+\gamma_\nu}{\gamma_s-\gamma_\nu}\right)^{\mu_\nu}.$$

С другой стороны, в $P_{n,s,\mu_s-1}(x)$ сумма слагаемых, содержащих $x^{\gamma_s}, x^{\gamma_s}\ln x, \ldots, x^{\gamma_s}(\ln x)^{\mu_s-1}$ определяется из условия

$$\sum_{l=0}^{\mu_s-1} M_{n,s,l}\, x^{\gamma_s}(\ln x)^l = \operatorname*{Res}_{\zeta=-\gamma_s} \frac{1}{\Gamma(\mu_s)} \frac{\prod_{\nu=0}^{m}(\zeta-\gamma'_\nu)^{\mu_\nu} x^{-\zeta} a^{(\mu_s-1)}_{s,\mu_s-1}}{\prod_{\nu=0}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)^{\mu_\nu}(\zeta-\gamma'_s)},$$

откуда, как нетрудно заметить, M_{n,s,μ_s-1} определяется из равенства

$$M_{n,s,\mu_s-1} = \frac{(-1)^{\mu_s-1}}{[\Gamma(\mu_s)]^2} \frac{\prod_{\nu=0}^{m}(-\gamma_s-\gamma'_\nu)^{\mu_\nu}}{\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{m}(-\gamma_s+\gamma_\nu)^{\mu_\nu}} \frac{a^{(\mu_s-1)}_{s,\mu_s-1}}{(-\gamma_s-\gamma'_s)},$$

и поэтому

$$M_{n,s,\mu_s-1} = |M_{n,s,\mu_s-1}| = \frac{1}{[\Gamma(\mu_s)]^2}(\gamma'_s+\gamma_s)^{2\mu_s-1} \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{m}\left(\frac{\gamma_s+\gamma'_\nu}{-\gamma_s+\gamma_\nu}\right)^{2\mu_\nu}.$$

Откуда в частном случае, когда $\mu_s=1$, получаем

$$|M_{n,s,0}|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\gamma'_s+\gamma_s} \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{m}\left|\frac{\gamma'_s+\gamma'_\nu}{-\gamma_s+\gamma_\nu}\right|^{\mu_\nu},$$

что вполне согласуется с оценкой Л. Шварца.

ЕГУ, ЕрПИ *Поступила 23.02.1987*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Markoff A.** Sur une queston posee por Mendeleeff.—Bull. l'Acad. de Saint-Peterburg. 1890, v. 52, p. 1—24.
2. **Bernstein S.** Lecons sur les properties extremalies et la meilleure approximation des sonctions analifiques d'une variable reele. Paris, Guathier-Villars, 1926.
3. **Schwartz L.** Etude des sommes déxponentielies. Paris, Hermann, 1959.

Ամփոփում

Աշխատանքում $P_n(x)=a_0\sum_{k=1}^{m} x^{\gamma_k}\sum_{\nu=1}^{\mu_k-1} a_{k,\nu}(\ln x)^\nu$ *բազմանդամի համար, որտեղ* $\mu_k\in N$, $k=1, 2, \dots, m$, $\sum_{k=1}^{m}\mu_k=n$ *դրվում և լուծվում է* $|a_{s,\nu}|$, $\nu=0, 1, \dots, \mu_s-1$ *գործակիցների գնահատման խնդիրը, երբ* $\|P_n\|_{L^2(01)}=M$. *Բերվում է էքստրեմալ բազմանդամի տեսքը։*

SUMMARY

In this work for the polynomials $P_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{m}x^{\gamma_k}\sum_{\nu=1}^{\mu_k-1}a_{k,\nu}(\ln x)^\nu$ with $\|P_n\|_{L^2(01)}=$ and $\mu_k\in N$, $k=1, 2, \dots, m$, $\sum_{k=1}^{m}\mu_k=n$ the problem of estimation of the coefficients a is solved. Also the explicit form of the extremal polynom is given.