ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1988 Естественные науки

Математика

УДК 513.8

М. И. КАРАХАНЯН

ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОБОБЩЕННО НОРМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В данной работе на языке почти-периодичности обобщенных матричных элементов $\varphi(T(g)x)$, где T—равностепенно непрерывное представление локально-компактной абелевой группы G класса (C_0) в слабо полном линейном топологическом пространстве X, доказывается критерий полноты системы собственных векторов представления T, а в случае, когда X—рефлексивное банахово пространство и T—изометрическое представление группы G в пространстве X, у которого все весовые подпространства конечномерны, доказывается существование полной биортогональной системы функционалов к объединению базисов весовых подпространств представления T. Данные результаты применяются к нормальным операторам, действующим в пространстве X.

Пусть S—компактный эрмитов оператор, действующий в слабо полном банаховом пространстве X. Отметим, что везде ниже под слабой полнотой пространства X будет пониматься слабая секвенциальная полнота (см. [1]). Как показал Ю. И. Любич (см. [2, 3]), для полноты системы собственных векторов компактного оператора S необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in X$ и $\varphi\in X^*$ функция $\varphi(e^{itS}x)$ была боровской почти периодической функцией на $\mathbf{R}^1$.

В данной работе с использованием методики работ [2, 3] будет получено обобщение этих результатов для нормальных операторов, действующих в локально выпуклых топологических пространствах.

Пусть X—локально выпуклое линейное топологическое пространство и $\langle X, Y\rangle$—дуальная пара, согласованная с локально выпуклой топологией на X. Пространство всех непрерывных линейных операторов, отображающих X в себя, обозначим через $B_c(X)$.

Пусть G—топологическая группа и $T:G\rightarrow \mathrm{Aut}(X)$—равностепенно непрерывное представление группы G класса (C_0) в пространстве X, т. е. оно является сильно непрерывным и для всякой непрерывной полунормы $p(x)$ на X существует непрерывная полунорма $q(x)$, что $p(T(g)x)\leqslant q(x)$ для каждого $x\in X$ и $g\in G$. Отметим, что в случае, когда X—банахово пространство, условие равностепенной непрерывности представления T группы G класса (C_0) в пространстве X равносильно тому, что в некоторой эквивалентной норме в X представление T будет изометрическим. Обозначим через $\hat{G}$ группу унитарных характеров группы G. Вектор $x\in X$ $(x\neq 0)$ назовем собственным вектором представления T, если существует характер $\chi\in\hat{G}$ такой, что $T(g)x=\chi(g)x$ для всех $g\in G$, а инвариантное подпространство $X_\chi=\{x\in X:T(g)x=\chi(g)x$ для каждого $g\in G\}$ называют весовым подпространством представления T. Через $C_{AP}(G)$ обозначим банахову алгебру равномерно почти периодических функций на группе G, наделенной sup-нормой. Если G—локально компактная, σ—компактная абелева группа, то, пополняя алгебру $C_{AP}(G)$ по предгильбертовой структуре, определяемой скалярным произведением $\langle f, g\rangle_b=M[f\bar{g}]$, где $M[f\bar{g}]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(H_n)}\int\limits_{H_n}f\bar{g}d\lambda$ (см. [4], стр. 323), получим гильбертово пространство почти периодических функций Безиковича $B^2(G)$, в котором унитарные характеры $\hat{G}$ образуют ортонормированный базис.

Теорема 1. Пусть X—слабо полное локально выпуклое линейное топологическое пространство, согласованное с двойственностью $\langle X, Y\rangle$, G—локально компактная, σ—компактная абелева группа и T—равностепенно непрерывное представление группы G класса (C_0) в пространстве X. Тогда для того чтобы система собственных векторов представления T была полна в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in X$ и $\varphi\in Y$ функция $\varphi(T(g)x)\in C_{AP}(G)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть по $\varepsilon>0$, $x-\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\in U(0;\varepsilon)$, где $T(g)x_k=\chi_k(g)x_k$, а $U(0;\varepsilon)$—окрестность базы нуля в локально выпуклой топологии. Тогда для каждого $\varphi\in Y$ $|\varphi(T(g)x)-\sum\limits_{k=1}^{n}\chi_k(g)\varphi(x_k)|<L\varepsilon$, откуда $\varphi(T(g)x))\in C_{AP}(G)$.

Достаточность. Так как для каждого $x\in X$ и $\varphi\in Y$ функция $\varphi(T(g)x)\in C_{AP}(G)$, то условие слабой полноты пространства обеспечивает существование операторов P_χ как предела

$$P_\chi x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(H_n)}\int\limits_{H_n}T(g)x\overline{\chi(g)}\,d\lambda(g),$$

которые удовлетворяют следующим свойствам:

i) $P_{\chi_\alpha}P_{\chi_\beta}=\delta_{\alpha\beta}P_{\chi_\alpha}$;

ii) $TP_\chi x=\chi P_\chi x$.

Таким образом в силу ii) вектор $x(\chi)=P_\chi x$ является собственным вектором представления T. Пусть $\varphi\in Y$—такой функционал, что $\varphi(x(\chi))=0$. Тогда все коэффициенты Фурье-Бора $c_\chi=\varphi(x(\chi))$ функции $\varphi(T(g)x)$ равны нулю, значит $\varphi(T(g)x)=0$, откуда $\varphi(x)=0$, и значит $\varphi=0$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть **H**—гильбертово пространство, G— локально компактная, σ—компактная абелева группа и T—изотермическое представление группы G в пространстве **H**. Тогда для того чтобы система собственных векторов представления T образовала в **H** ортонормированный базис, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары x, $y\in$ **H** функция $\langle T(g)x, y\rangle\in C_{AP}(G)$.

Для произвольных локально компактных групп G, исходя из других соображений (см. [5], стр. 104), можно доказать аналог теоремы 1 для случая, когда пространство X рефлексивно.

Отметим, например, что слабо полными локально выпуклыми топологическими пространствами являются пространства $L(R^n)$, $L'(R^n)$, D_Ω, D'_Ω, O_Ω, O'_Ω (подробнее см. [6]).

Пусть H—равностепенно непрерывное представление группы R^1 класса (C_0) в пространстве X, у которого инфинетизимальным производящим генератором является оператор $iH\in B_c(X)$. Тогда оператор H назовем обобщенно эрмитовым оператором. Оператор $A\in B_c(X)$ назовем обобщенно нормальным, если $A=H+iK$, где H, $K\in B_c(X)$, $HK=KH$ и операторы H, K—обобщенно эрмитовые операторы. Оператор $A^+=H-iK$ назовем его сопряженным. Нетрудно видеть, что оператор A^+ определяется однозначно по оператору A. С использованием теоремы I получается следующая

Теорема 2. Пусть X—слабо полное локально выпуклое линейное топологическое пространство, согласованное с двойственностью $<X, Y>$, и $A\in B_c(X)$—обобщенно нормальный оператор. Тогда для полноты системы собственных векторов оператора A в пространстве X необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in X$ и $\varphi\in Y$ функция $\varphi[e^{i(sK-tH)}x]\in C_{AP}(R^2)$, где $H=\frac{A+A^+}{2}$, $K=\frac{A-A^+}{2i}$.

Данный результат является обобщением результатов [7, 8]. Применяя теорему I к конечному семейству $\{A_1, ..., A_N\}$ коммутирующих обобщенно нормальных операторов из $B_c(X)$, получаем

Следствие 2. Пусть X—слабо полное локально выпуклое линейное топологическое пространство, согласованное с двойственностью $<X, Y>$ и $\{A_1, ..., A_N\}$—конечное семейство коммутирующих, обобщенно нормальных операторов из $B_c(X)$. Тогда для полноты системы собственных векторов семейства $\{A_1, ..., A_N\}$ в пространстве X необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in X$ и $\varphi\in Y$ функция $\varphi[e^{i(<\bar{s}, \bar{K}>-<\bar{t},\bar{H}>)}x]\in C_{AP}(R^{2N})$, где $<\bar{s}, \bar{K}>=\sum_{p=1}^{N} s_pK_p$, $<\bar{t}, \bar{H}>=\sum_{p=1}^{N} t_pH_p$; $H_p=\frac{A_p+A_p^+}{2}$, $K_p=\frac{A_p-A_p^+}{2i}$, $p=1, ..., N$.

Рассмотрим случай неограниченных операторов. Пусть H—линейный оператор, заданный на линейном многообразии $D(H)\subset X$. Следуя Ю. И. Любичу (см. [3]), оператор H назовем обобщенно корректным, если

1) H—замкнутый оператор и D(H) плотно в X;

2) задача Коши $\begin{cases}\frac{dx(t)}{idt}=Hx(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}$ при каждом $x_0\in D(H)$ имеет единственное решение в классе сильно дифференцируемых вектор-функций;

3) операторы $H(t)$, определяемые соотношением $x(t)$, $=H(t)x_0$, являются равностепенно непрерывной однопараметрической группой класса (C_0) (см. [1]).

Аналогично (как в [7]) линейный оператор A, заданный на линейном многообразии $D(A)\subset X$, назовем обобщенно H-корректным, если

1) A—замкнутый оператор и существует замкнутый линейный оператор A^+ такой, что $D=D(A)\cap D(A^+)$ плотно в X и $AA^+x=A^+Ax$ для каждого $x\in D$;

2) задача $\begin{cases}s\frac{\partial x(s, t)}{\partial s}+t\frac{\partial x(s, t)}{\partial t}=i(sK-tH)x(s, t)\\ x(0, 0)=x_0, \ -\infty<s, t<\infty\end{cases}$

при любом $x_0 \in D$ имеет единственное решение $x(s, t)$ в классе сильно дифференцируемых вектор-функций, где $H = \frac{A + A^+}{2}$, $K = \frac{A - A^+}{2i}$;

3) операторы $V(s, t)$, определяемые соотношением $x(s, t) = V(s, t)x_0$, являются равностепенно непрерывной двухпараметрической группой класса (C_0).

Как и выше, из теоремы 1 получается следующая

Теорема 3. Для того чтобы система собственных векторов обобщенно H-корректного оператора A была полна в слабо полном локально выпуклом линейном топологическом пространстве X, согласованном с двойственностью $\langle X, Y \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in X$ и $\varphi \in Y$ функция $\varphi[V(s, t)x] \in C_{AP}(\mathbf{R}^2)$.

В случае, когда $A = A^+$, получается эрмитов вариант теоремы 3. Отметим, что похожий результат можно получить для конечного семейства коммутирующих обобщенно н-корректных операторов.

Хорошо известно (см. [3]), что если A—корректный оператор, действующий в рефлексивном банаховом пространстве X, у которого каждое собственное подпространство конечномерно и система собственных векторов полна в пространстве X, то существует полная система функционалов, биортогональная к объединению базисов всех собственных подпространств оператора A. Приведем обобщение этого результата, применимого к нормальным операторам в рефлексивном банаховом пространстве.

Теорема 4. Пусть X—рефлексивное банахово пространство, G—локально компактная абелева группа, T—изометрическое представление группы G в пространстве X, у которого размерность всех весовых подпространств X_χ конечномерна. Если система собственных векторов представления T полна в пространстве X, то существует полная система функционалов, биортогональная к объединению базисов всех весовых подпространств представления T.

Доказательство. В пространстве X^* рассмотрим семейство сопряженных операторов $\{T^*(g)\}_{g \in G}$. Так как $\|T^*(g)\| = \|T(g)\| = 1$, то семейство операторов $\{T^*(g)\}_{g \in G} \subset B(X^*)$ образует изометрическую группу. Так как система собственных векторов представления T полна в пространстве X, то все обобщенные матричные элементы $\varphi(T(g)x) \in C_{AP}(G)$, где $x \in X$, $\varphi \in X^*$. В силу рефлексивности пространства X всевозможные функционалы на X^*—это всевозможные векторы $x \in X$, поэтому для каждого $\Phi \in X^{**}$ и $\varphi \in X^*$ имеем $\Phi[T^*(g)\varphi] = x(T^*(g)\varphi) = \varphi(T(g)x) \in C_{AP}(G)$. Таким образом для каждого $\varphi \in X^*$ функция $g \to T^*(g)\varphi$ слабонепрерывна, тогда в силу теоремы Де-Лю и Гликсберга (см. [5]) T^* сильнонепрерывен, и, значит, является представлением. Поэтому система собственных функционалов представления T^* полна в пространстве X^*. Положим $X_\chi^* = \{\psi \in X^* : T^*(g)\psi = \chi(g)\psi$ для всех $g \in G\}$. Ясно, что если $\chi, \chi' \in \hat{G}$ и $\chi \neq \chi'$, а $\varphi \in X_{\chi'}^*$, $x \in X_\chi$ то $\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x) = 0$. Нетрудно видеть (как в [3]), что $\dim X_\chi = \dim X_\chi^*$. Пусть $\{e_1, ..., e_n\}$—базис в X_χ. Выберем какой-нибудь базис $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ в X_χ^* и перестроим его в базис, биортогональный к системе $\{e_1, ..., e_n)$. Отметим, что $\det(\varphi_j(e_k)) \neq 0$, ибо в противном случае нетривиальное решение системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(e_k) = 0, \ k = 1, ..., n,$$

породило бы ненулевой функционал

$$\psi(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j(x),$$

который аннулировал бы X_γ, что противоречит линейной независимости системы функционалов $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$. Но тогда система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j(e_k)=a_k,\ j,\ k=1,\ ...,\ n$$

разрешимо при любой правой части, что и позволяет перестроить базис $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ в базис, биортогональный к системе $\{e_1, ..., e_n\}$. Объединение таких базисов в X^*_χ и дает искомую систему функционалов. Теорема доказана.

Пусть $\{A_1, ..., A_N\}$—семейство коммутирующих нормальных операторов из $B(X)$. Используя вышеуказанную теорему 4 применительно к конечному семейству $\{A_1, ..., A_N\}$, получим следующий результат.

Теорема 5. Пусть X—рефлексивное банахово пространство, $\{A_1, ..., A_N\}$—конечное семейство коммутирующих, нормальных операторов из $B(X)$, у которого каждое собственное подпространство конечномерно. Если система собственных векторов семейства $\{A_1, ..., A_N\}$ полна в пространстве X, то существует полная система функционалов, биортогональная к объединению базисов всех собственных подпространств семейства $\{A_1, ..., A_N\}$.

Рассмотрим случай неограниченных операторов. Пусть A есть н-корректный оператор (см. [7]), тогда из теоремы 4 выводится следующая:

Теорема 6. Пусть X—рефлексивное банахово пространство, A есть н-корректный оператор, у которого каждое собственное подпространство конечномерно и система собственных векторов полна в пространстве X. Тогда существует полная система функционалов, биортогональная к объединению базисов всех собственных подпространств оператора A.

Аналогичную теорему можно сформулировать для конечного семейства коммутирующих н-корректных операторов. В случае, когда $A=A^+$, получаем вышеуказанный результат Ю. И. Любича.

Кафедра дифференциальных уравнений *Поступила 14.01.1988*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
2. **Любич Ю. И.** Почти-периодичность функции в спектральном анализе операторов.—ДАН СССР, 1960, т. 132, № 3, с. 518—520.
3. **Любич Ю. И.** Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора.—УМН, 1963, т. 18, вып. I (109), с. 165—171.
4. **Хьюитт Э., Росс К.** Абстрактный гармонический анализ. Т. I. М.: Наука, 1975.
5. **Любич Ю. И.** Введение в теорию банаховых представлений групп. Харьков: Вища школа, 1985.
6. **Рид М., Саймон Б.** Функциональный анализ. Т. I. М.: Мир, 1977.
7. **Караханян М. И.** Почти-периодичность в спектральном анализе нормальных операторов.—ДАН АРМ. ССР, 1986, т. 83, № 4, с. 154—157.
8. **Акопян Г. С., Караханян М. И.** О некоторых спектральных свойствах нормальных операторов в банаховом пространстве.—Уч. записки ЕГУ, 1986, № 3, с. 3—10.

Ամփոփում

Տվյալ աշխատանքում $\varphi(T(g)x)$ *ընդհանրացված մատրիցային տարրերի համարյա-պարբերականության լեզվով* (T-*ն* G *լոկալ կոմպակտ աբելյան խմբի* (C_0) *դասի հավասարաստիճան անընդհատ ներկայացումն է* X *թույլ լրիվ գծային տոպոլոգիական տարածությունում) ապացուցվում է* T *ներկայացման սեփական վեկտորների լրիվության չափանիշը։ Այնուհետև, երբ* X-*ը ռեֆլեկտիվ Բանախի տարածություն է, իսկ* T-*ն* G *խմբի այնպիսի իզոմետրիկ ներկայացումն է* X-*ում, որի բոլոր կշռային ենթատարածությունների չափողականությունը վերջավոր է, ապացուցվում է այդ ենթատարածություններում բազիսային վեկտորների միավորման համար լրիվ բիօրթոգոնալ ֆունկցիոնալների համակարգի գոյությունը։ Տվյալ արդյունքները կիրառվում են նորմալ օպերատորների համար, որոնք գործում են* X *տարածությունում։*

SUMMARY

In terms of almost-periodicity of functions φ $(T(g)x)$ with T-uniorder continuous representation of local compact Abel group G of the (C_0) class in weakly full linear topological space **X**, the criterion of fullness for T-representation eigenvectors has been proved. In case, when X is reflexive Banach space and T is an isometric representation of group G of X space, with all weighted subspaces having finite dimensions. the existence of full functional system biorthogonal to the union of the basis vectors of weighted snbspace of T representation has been proved.