Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 21 – 27.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{L}$-ВИНЕРА-ХОПФА

А. Г. КАМАЛЯН, И. М. КАРАХАНЯН, А. О. ОГАНЕСЯН

Ереванский государственный университет[1]
Институт Математики НАН Армении
E-mails: *armen.kamalyan@ysu.am; m_karakhanyan@ysu.am; ahovhannisyan@aua.am*

Аннотация. Заменой в определении оператора свертки преобразования Фурье, спектральным преобразованием самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля на оси $\mathcal{L}$, введены понятия оператора $\mathcal{L}$-свертки и оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа. Рассматривается случай безотражательного потенциала с одним собственным значением. Выявлена связь с интегральным оператором Винера-Хопфа. В случае кусочно-непрерывного символа исследованы свойства фредгольмовости и обратимости оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа.

MSC2010 numbers: 47G10, 47B35.

Ключевые слова: оператор $\mathcal{L}$-свертки; безотражательный потенциал; оператор $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа.

1. Операторы $\mathcal{L}$-свертки и $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа

Пусть $\mathcal{L}$ – максимальный симметрический оператор порожденный дифференциальным выражением $(\ell y)(x) = -y'' + q(x)y(x)$ с вещественным потенциалом q удовлетворяющим условию $(1 + |x|)|q(x)| \in L_1(\mathbb{R})$, а $u^-(x, \lambda)$, $u^+(x, \lambda)$ $(x, \lambda \in \mathbb{R})$ решения уравнения $\ell y = \lambda^2 y$, являющиеся собственными функциями левой и правой задач рассеяния и представляющие собой полный ортонормированный набор собственных функций непрерывного спектра (см. [1], [2]).

Условимся далее через $m(a)$ $(a \in L_\infty(\mathbb{R}))$ и τ обозначать операторы действующие в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ по формулам $m(a)y = ay$, $(\tau y)(x) = y(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, а через I будем обозначать тождественный оператор, каждый раз указывая пространство, где он действует.

Определим операторы $U_\mp$, $U : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, по формулам

$$(U_\mp y)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^\mp(x, \lambda) y(x)\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$U = m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)\tau U_+,$$

[1]Исследование выполнено при поддержке ГКН МОН РА в рамках совместного научного проекта YSU-SFU-16/1 финансируемого в результате международного конкурса РА-ЕГУ-ЮФУ РФ-2016

где $\chi_\pm$ – характеристическая функция множества $\mathbb{R}_\pm$ ($\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, $\mathbb{R}_- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$), а интегралы понимаются в смысле сходимости по норме $L_2(\mathbb{R})$. Операторы $U_\mp$, U ограничены и кроме того оператор U является частичной изометрией и удовлетворяет равенствам

$$U^*U = I - P, \qquad UU^* = I, \tag{1.1}$$

где P – проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на собственное подпространство H соответствующее дискретному спектру оператора $\mathcal{L}$ (см. [1], [3], [4]).

Обозначим через $\mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, множество всех функций $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ обладающих следующим свойством: если $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$, то $U^*m(a)Uy \in L_p(\mathbb{R})$ и $\|U^*m(a)Uy\| \leqslant c_p \|y\|_p$, где постоянная c_p не зависит от y. Для $a \in \mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$, оператор $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ определенный по формуле $W^0_{\mathcal{L}}(a) = U^*m(a)U$ ограничен в $L_2(\mathbb{R})$ и может быть непрерывным образом продолжен с $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$ до ограниченного оператора действующего в $L_2(\mathbb{R})$, который также будем обозначать через $W^0_{\mathcal{L}}(a)$. Этот оператор мы будем называть оператором $\mathcal{L}$-свертки, с $\mathcal{L}$ символом a.

Определим операторы $\pi_\pm : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R}_\pm)$, $\pi^0_\pm : L_p(\mathbb{R}_\pm) \to L_p(\mathbb{R})$, $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ по формулам $(\pi_\pm y)(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}_\pm$, $(\pi^0_\pm y)(x) = y(x) x \in \mathbb{R}_\pm$ и $(\pi^0_\pm y)(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}_\mp$. Оператор $W_{\mathcal{L}}(a) = \pi_+ W^0_{\mathcal{L}}(a) \pi^0_+ : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$ будем называть интегральным оператором $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа. Заметим, что в случае $q = 0$, оператор U совпадает с преобразованием F:

$$(Fy)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} y(s)\, ds, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \;\; y \in L_2(\mathbb{R}).$$

По этой причине, в случае $q = 0$, операторы $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ и $W_{\mathcal{L}}(a)$ совпадают соответственно с оператором свертки $W(a)$ и с оператором Винера-Хопфа (см. [5]). Условимся также в случае $q = 0$ множество $\mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$ обозначать через $\mathcal{M}_p$. Как известно (см. [5]) $\mathcal{M}_p$ является банаховой алгеброй с нормой $\|a\|_{\mathcal{M}_p} = \left\|W^0(a)\right\|_{\mathcal{L}(L_p)}$.

2. Безотражательные потенциалы

В данной работе мы исследуем свойства фредгольмовости и обратимости оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, в случае оператора $\mathcal{L}$ соответствующему безотражательному потенциалу с дискретным спектром состоящим из одного собственного значения $(i\mu)^2$ и с правым нормировочным коэффициентом c_+. Коэффициент прохождения $t(\lambda)$ в указаном случае определяется равенством $t(\lambda) = (\lambda + i\mu)(\lambda - i\mu)^{-1}$ (см. [2], теорема 3.5.1).

Как известно (см. [1],[2]) операторы преобразования действующие по формулам

$$(\mathcal{K}_+y)(x) = y(x) + \int\limits_x^\infty K_+(x,t)y(t)\,dt, \quad (\mathcal{K}_-y)(x) = y(x) + \int\limits_{-\infty}^x K_-(x,t)y(t)\,dt,$$

ограничены соответственно в пространствах $L_p(\gamma,\infty)$, $L_p(-\infty,\gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, при всех $\gamma \in \mathbb{R}$. Ядра $K_\pm$ определяются из уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко и в нашем случае (см., например, [6]) справедливы равенства

$$K_\pm(x,t) = -\varphi(x)\psi_\pm(t),$$

где $\varphi(x) = \sqrt{\mu/2}\,\mathrm{ch}^{-1}\mu(x-\xi)$, $\psi_\pm(t) = \sqrt{2\mu}\,e^{\mp\mu(t-\xi)}$, а $\xi = \mu^{-1}\ln\left[c_+(2\mu)^{-1/2}\right]$.

Заметим также, что (см. [6]) потенциал определяется равенством

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}(K^+(x,e)) = -\frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2\mu(x-\xi)},$$

а $\varphi(x)$ является нормированной собственной функцией соответствующей собственному значению $(i\mu)^2$. Кроме того, имеем

$$u^-(x,\lambda) = t(\lambda)\left(1 - \frac{1}{\mu - i\pi}\psi_+(x)\varphi(x)\right)e^{i\lambda x}, \quad u^+(x,\lambda) = t(\lambda)u^-(x,-\lambda). \tag{2.1}$$

Рассмотрим операторы $V_\pm, \Gamma_\pm : L_p(\mathbb{R}_\pm) \to L_p(\mathbb{R}_\pm)$, $\Gamma : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, определенные по формулам:

$$(V_+y)(x) = \int\limits_0^x y(t)\,dt, \qquad (V_-y)(x) = \int\limits_x^0 y(t)\,dt,$$

$$\Gamma_\pm = I - m(\psi_\pm)V_\pm m(\varphi), \qquad \Gamma = \pi_+^0\Gamma_+\pi_+ + \pi_-^0\Gamma_-\pi_-.$$

Заметим, что $\Gamma_\pm = \mathcal{K}_\pm^*$.

Лемма 2.1. *Операторы $\Gamma_\pm$, Γ обратимы. Обратные операторы определяются равенствами*

$$\Gamma_\pm^{-1} = I + m(\varphi)V_\pm m(\psi_\pm), \qquad \Gamma^{-1} = \pi_+^0\Gamma_+^{-1}\pi_+ + \pi_-^0\Gamma_-\pi_-\,. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть операторы $\Gamma_\pm^{-1}$ определены формулами (2.2). Пользуясь равенствами $(2\mu)^{-1}\varphi\psi_\pm^2 = \psi_\pm - \varphi$ и $(2\mu)^{-1}(\psi_\pm^2)' = \mp\psi_\pm^2$ с помощью интегрирования по частям несложно убедиться, что

$$m(\varphi)V_\pm m(\psi_\pm^2)V_\pm m(\varphi) = -m(\psi_\pm)V_\pm m(\varphi)V_\pm m(\psi_\pm).$$

Последнее означает, что $\Gamma_\pm^{-1}\Gamma_\pm = I$.

Обозначим через $\hat\varphi$ первообразную функции φ^2. Меняя местами интегралы в выражении $V_\pm m(\varphi^2)V_\pm m(\psi_\pm)y$, где y, определенная на $\mathbb{R}_\pm$, непрерывная финитная функция, легко видеть, что $V_\pm m(\varphi^2)V_\pm m(\psi_\pm) = \pm m(\hat{\varphi})V_\pm m(\psi_\pm) \mp V_\pm m(\psi_\pm\hat{\varphi})$. Следовательно, $\Gamma_\pm\Gamma_\pm^{-1} = I + m\left(\varphi \mp \psi_\pm\hat{\varphi}\right)V_\pm m(\psi_\pm) - m(\psi_\pm)m\left(\varphi \mp \psi_\pm\hat{\varphi}\right)$. Легко видеть, что $\left(\varphi\psi_\pm^{-1} - \hat{\varphi}\right)' = 0$, т.е. $\varphi \mp \hat{\varphi}\psi_\pm = d_\pm\psi_\pm$, где $d_\pm$ – числа и потому $\Gamma_\pm\Gamma_\pm^{-1} = I$. Вторая формула (2.2) очевидно следует из определения Γ. $\square$

Обозначим через S оператор сингулярного интегрирования, определенной равенством

$$(Sy)(x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y(s)}{s-x}\,ds, \qquad x \in \mathbb{R},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Как известно (см. [7]), оператор S ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Пусть $P_\pm = (I \pm S)/2$. Из результатов [4] следует справедливость равенств

$$U_- = (m(t)P_+ + P_-)F\Gamma, \quad U_+ = \tau(P_+ + m(\bar{t})P_-)F\Gamma, \tag{2.3}$$

$$U = \left(m(t\chi_+ + \chi_-)P_+ + m(\chi_+ + \bar{t}\chi_-)P_-\right)F\Gamma. \tag{2.4}$$

В частности операторы $U_\pm$, U связаны соотношениями $U = m(\chi_+ + \bar{t}\chi_-)U_-$, $U = \tau(\chi_+ + \bar{t}\chi_-)U_+$ и потому

$$W^0_{\mathcal{L}}(a) = U_-^* m(a)U_- = U_+^* m(a)U_+\,, \tag{2.5}$$

а с учетом (1.1) и очевидного равенства $r^* = \tau$, получаем

$$U_-^*U_- = U_+^*U_+ = I - P, \qquad U_-U_-^* = U_+U_+^* = I. \tag{2.6}$$

Пользуясь формулами (2.1), (2.3)-(2.6), несложно убедиться, что в случае, когда $a = 1 + F_k$, где $k \in L_1(\mathbb{R})$, имеем

$$\left(W^0_{\mathcal{L}}(a)y\right)(x) = y(x) - \varphi(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)y(s)\,ds + \int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x,s)y(s)\,ds, \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$K(x,s) = k(x-s) + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x-s-s')e^{\mu s'\cdot\operatorname{sgn}(x-s-s')}k(s')\,ds'\varphi(x)\varphi(s)\,.$$

Аналогично,

$$\left(W_{\mathcal{L}}(a)y\right)(x) = y(x) - \varphi(x)\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(s)y(s)\,ds + \int\limits_{0}^{\infty}K(x,s)y(s)\,ds\,.$$

3. Основные результаты

В следующей теореме получена связь между операторами $W_{\mathcal{L}}(a)$ и $W(a)$.

Теорема 3.1. *Для $a \in \mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$, $1 \leqslant p < \infty$, справедливо равенство*

$$W_{\mathcal{L}}(a) = \mathcal{K}_+ W(a)\Gamma_+ . \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $y \in L_p(\mathbb{R}_+) \cap L_2(\mathbb{R}_+)$. Пользуясь тождествами $P_\pm F = Fm(\chi_\pm)$ (см. [5]) из формул (2.3)-(2.5) получим

$$\begin{aligned}
&W_{\mathcal{L}}(a)y = \pi_+ U_-^* m(a)\pi_+^0 y = \pi_+\Gamma^*(m(\chi_+)W^0(a)m(\chi_+) + m(\chi_-)W^0(at)m(\chi_+)+\\
&m(\chi_+)W^0(\bar{t}a)m(\chi_-) + m(\chi_-)W^0(a)m(\chi_-))\Gamma\pi_+^0 y\\
&= \mathcal{K}_+\pi_+(m(\chi_+) + m(\chi_-))\begin{pmatrix} W^0(a) & W^0(\bar{t}a) \\ W^0(ta) & W^0(a)\end{pmatrix}\pi_+^0\Gamma_+ y\\
&= \mathcal{K}_+\pi_+ W^0(a)\pi_+^-\Gamma_+ y = \mathcal{K}_+ W(a)\Gamma_+ y\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, оператор $W(a)$ одновременно с $W_{\mathcal{L}}(a)$ допускает непрерывное продолжение в $L_p(\mathbb{R})$. $\square$

Следствие 3.1. *Множество $\mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$, $1 \leqslant p < \infty$, совпадает с $\mathcal{M}_p$.*

Как известно (см. [5]) любая, имеющая конечное число разрывов кусочно-постоянная функция на $\mathbb{R}$ принадлежит $\mathcal{M}_p$, $1 < p < \infty$. Замыкание алгебры кусочно-постоянных функций в алгебре $\mathcal{M}_p$ обозначим через PC_p. Имеет место следующее включение $PC_p \subset PC_2 = PC$ (см. [5]), где PC класс функций a, имеющих предельные значения $a(x \pm 0)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, в том числе и на бесконечности $a(\infty \pm 0) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} a(x)$. В свою очередь $C_p \subset PC_p$, где C_p замыкание алгебры Винера $W(\mathbb{R}) = \{c + F_k; c \in \mathbb{C}, k \in L_1(\mathbb{R})\}$ в $\mathcal{M}_p$. Кроме того PC_p содержит функции ограниченной вариации (см. [5]).

Сопоставим каждой функции $a \in PC_p$ (см. [5]) функцию $a_p : \dot{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ ($\dot{\mathbb{R}} = R \cup \{\infty\}$, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) – соответственно одноточечная и двухточечная компактификации $\mathbb{R}$) определенную по формуле:

$$a_p(x,\xi) = \frac{1}{2}(a(x-0) + a(x+0)) + \frac{1}{2}(a(x-0) - a(x+0))\mathrm{cth}\pi\left(\frac{i}{p} + \xi\right).$$

Функция a может иметь не более чем счетное число точек разрывов $a(x_k - 0) \neq a(x_k + 0)$ ($x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$). Функция $a_p(x,\xi)$ непрерывна в следующем смысле (см. [5]): точки $a(x_k - 0)$ и $a(x_k + 0)$ соединяются дугой окружности, из которой отрезок соединяющий точки $a(x_k - 0)$ и $a(x_k + 0)$ виден под углом $2\pi/\max\{p,p'\}$, ($p' = p/p-1$) расположенная справа (слева) от отрезка при $p > 2$ (при $p > 2$), а при $p = 2$ дуга совпадает с отрезком соединяющим эти точки. В случае $a_p(x,\xi) \neq$

0 индекс $\mathrm{ind} a_p$ определяется как приращение аргумента $(2\pi)^{-1}\arg a_p(x,\xi)$, когда x пробегает $\mathbb{R}$ и в точках разрыва $x_k \in \mathbb{R}$ параметр ξ пробегает от $-\infty$ до ∞.

Под обобщенной p-факторизацией функции $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ будем понимать представление $a(\lambda) = a_-(\lambda)(\lambda - i)^{\varkappa}(\lambda + i)^{-\varkappa} a_+(\lambda)$, где $(\lambda - i)^{-2/p} a_- \in P_-(L_p(\mathbb{R}))$, $(\lambda - i)^{-2/p'} a_-^{-1} \in P_-(L_{p'}(\mathbb{R}))$, $(\lambda + i)^{-2/p'} a_+ \in P_+(L_{p'}(\mathbb{R}))$, $(\lambda + i)^{-2/p} a_+^{-1} \in P_+(L_p(\mathbb{R}))$, а $\varkappa$ – целое число называемое p-индексом функции a.

Из теоремы 3.1 и результатов [5] § 4 следует следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть $a \in PC_p$, $1 < p < \infty$. Для того, чтобы оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ был нормально разрешимым в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, необходимо и достаточно чтобы $\inf |a_p(\lambda,\xi)| \neq 0$ $(\lambda \in \dot{\mathbb{R}},\ \xi \in \bar{\mathbb{R}})$. При выполнении этого условия оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ обратим, обратим слева, обратим справа в зависимости от того является ли число $\mathrm{ind}\, a_p$ равным нулю, положительным или отрицательным соответственно. Причем $\mathrm{Ind}\, W_{\mathcal{L}}(a) = -\mathrm{ind}\, a_p$.*

Теорема 3.3. *Пусть $a \in PC_p$, $1 < p < \infty$ и $\inf |a_p(\lambda,\xi)| \neq 0$ $(\lambda \in \dot{\mathbb{R}},\ \xi \in \bar{\mathbb{R}})$. Тогда a допускает обобщенную p'-факторизацию $(p' = p/(p-1))$, $a = a_- r_{\varkappa} a_+$, $r_{\varkappa}(\lambda) = (\lambda - i)^{\varkappa}(\lambda + i)^{-\varkappa}$, $\varkappa = \mathrm{ind}\, a_p$, и обратный слева (справа) и $W_{\mathcal{L}}(a)$ на плотном множестве в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при $\varkappa \geqslant 0$ (при $\varkappa \leqslant 0$) записывается в виде*

$$(W_{\mathcal{L}}(a))_\ell^{-1} = \Gamma_+^{-1} W(r_{-\varkappa}) W\left(a_+^{-1}\right) W\left(a_-^{-1}\right) \mathcal{K}_+^{-1}$$
$$\left((W_{\mathcal{L}}(a))_r^{-1} = \Gamma_+ W\left(a_+^{-1}\right) W\left(a_-^{-1}\right) W(r_{-\varkappa})\right).$$

Если $\varkappa < 0$, то $\ker W_{\mathcal{L}}(a) = \mathrm{span}\left\{\Gamma_+^{-1}\pi_+ F^{-1} g_k; k = 1,\ldots,-\varkappa\right\}$, где $g_k(\lambda) = (1 - i\lambda)^{-k}$. Если $\varkappa > 0$, то уравнение $W_{\mathcal{L}}(a)\varphi = f$ имеет решение в $L_p(\mathbb{R}_+)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty \left(\mathcal{K}_+^{-1} f\right)(t)\overline{h_k(t)}\, dt \qquad k = 1,\ldots,\varkappa, \quad \textit{где } h_k = \pi_+ F^{-1}\left(\bar{a}_-^{-1} g_{+k}\right).$$

Заметим, что $\mathcal{M}_1 = W(\mathbb{R})$ (см. [5]) и по этой причине требование $a \in W(\mathbb{R})$ является естественным, при исследовании оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ в пространстве $L_1(\mathbb{R})$. На основе работы [8] и формулы (3.1) результаты аналогичного характера могут быть сформулированы и в этом случае.

Abstract. By replacement in the definition of the convolution operator of Fourier transform by a spectral transform of a selfadjoint Sturm-Liouville operator on the axis $\mathcal{L}$, the concepts of $\mathcal{L}$-convolution and $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operators are introduced. The case of the reflectorless potentials with a single eigenvalue is considered. A relationship between the Wiener-Hopf and $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operators is established. In the case of

piecewise continuous symbol the Fredholm property and invertibility of the $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator are investigated.

Список литературы

[1] Л. Д. Фаддеев, "Обратная задача квантовой теории рассеяния. II", Итоги науки и техники, Сер. Современ. пробл. мат., **3**, 93 – 180 1974.

[2] В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, Наукова думка (1977).

[3] И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси", Изв. АН СССР, Матем., **18**, no. 5, 394 – 402 (1983).

[4] А. Г. Камалян, И. Г. Хачатрян, А. Б. Нерсесян, "Разрешимость интегральных уравнений с операторами типа $\mathcal{L}$-свертки", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **29**, no. 6, 31 – 81 (1994).

[5] Р. В. Дудучава, Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики, Тбилиси, Мецниереба, (1973).

[6] Ф. Калоджеро, А. Дегасперис, Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений, Мир, Москва (1985).

[7] I. Gohberg, N. Krupnik, One-Dimensional Linear Singular Integral Equations. I, Operator Theory: Advances and Applic., **53**, Birkhäuser Verlag, Basel (1992).

[8] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, **13**, no. 5(83), 3 – 120 (1958).

Поступила 8 ноября 2017