ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 1980 Естественные науки

Математика

УДК 517.98

Г. В. ВИРАБЯН

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ. I

В данной работе изучаются некоторые классы квадратичных матричных операторов в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Устанавливается спектральная связь матричного оператора с порожденными им квадратичными операторными пучками. Доказывается теорема о необходимом и достаточном условии, при котором матричный оператор становится компактным. Получены также некоторые достаточные условия, при которых матричный оператор подобен самосопряженному оператору в рассматриваемом гильбертовом пространстве.

Хорошо известно, что теория оперативных матриц не становится тривиальной даже в случае квадратных матриц [1].

В данной работе изучаются некоторые классы квадратных матричных операторов в ортогональной сумме гильбертовых пространств.

П. 0. Пусть h—сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Рассмотрим ортогональную сумму

$$H=h\oplus h \tag{1}$$

двух копий таких пространств. Скалярное произведение в H вводится обычным образом

$$<\hat{u}, \hat{v}>=(u_1, v_1)+(u_2, v_2),$$

где $\hat{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\hat{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ — элементы из H, $u_i, v_i (i=1, 2)\in h$, а $(\cdot, \cdot)$— скалярное произведение исходного пространства h.

В гильбертовом пространстве H рассмотрим матричный оператор

$$\Pi=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_{ij}(i, j=1, 2)$—линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве h.

П. 1. Вместе с оператором Π рассмотрим два операторных пучка в h

$$L_1(\lambda)=A_{11}-\lambda I-A_{12}R_{A_{22}}(\lambda)A_{21}, \quad (3)$$

$$L_2(\lambda)=A_{22}-\lambda I-A_{21}R_{A_{11}}(\lambda)A_{12}, \quad (4)$$

где $R_{A_{11}}(\lambda)=(A_{11}-\lambda I)^{-1}$, $R_{A_{22}}(\lambda)=(A_{22}-\lambda I)^{-1}$—резольвенты операторов A_{11} и A_{22}.

Обозначим через $\Lambda(\Pi)$ и $\Lambda(L_i)(i=1, 2)$ соответственно множество всех собственных значений матричного оператора Π и операторного пучка $L_i(i=1, 2)$.

Как обычно, через σ (A) обозначается спектр, а через ρ (A)—резольвентное множество оператора A.

Теорема 1. Если пересечение спектров операторов A_{11} и A_{22} пусто

$$\sigma(A_{11})\cap\sigma(A_{22})=\varnothing, \quad (5)$$

то множество собственных значений матричного оператора Π есть объединение множеств собственных значений операторных пучков L_1 и L_2, т. е.

$$\Lambda(\Pi)=\Lambda(L_1)\cup\Lambda(L_2). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть λ_0 является собственным значением матричного оператора Π, т. е. $\lambda_0\in\Lambda(\Pi)$. Это значит существует отличный от нулевого вектор $\hat{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\in H$, так что $\Pi\hat{u}=\lambda_0\hat{u}$, или в раскрытой форме

$$\left.\begin{aligned}A_{11}u_1+A_{12}u_2=\lambda_0u_1,\\A_{21}u_1+A_{22}u_2=\lambda_0u_2.\end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Из условия (5) следует, что объединение резольвентных множеств операторов A_{11} и A_{22} совпадает со всей комплексной плоскостью, т. е.

$$\rho(A_{11})\cup\rho(A_{22})=C. \quad (8)$$

Поэтому λ_0 принадлежит по крайней мере одному из этих множеств.

Пусть $\lambda_0\in\rho(A_{11})$. Тогда из (7) имеем

$$u_1=-R_{A_{11}}(\lambda_0)A_{12}u_2,$$

$$A_{22}u_2-\lambda_0u_2-A_{21}R_{A_{11}}(\lambda_0)A_{12}u_2=0,$$

т. е.

$$L_2(\lambda_0)u_2=0.$$

Элемент u_2 отличен от нуля, в противном случае получится $\hat{u}=\hat{0}$. Если $\lambda_0\in\rho(A_{22})$, то опять из соотношений (7) имеем

$$u_2=-R_{A_{22}}(\lambda_0)A_{21}u_1,$$

$$A_{11}u_1-\lambda_0u_1-A_{12}R_{A_{22}}(\lambda_0)A_{21}u_1=0,$$

т. е.

$$L_1(\lambda_0)u_1=0.$$

Элемент $u_1\neq0$, так как $\hat{u}\neq\hat{0}$.

Таким образом, доказано включение

$$\Lambda(\Pi) \subset \Lambda(L_1) \cup \Lambda(L_2). \tag{9}$$

Пусть теперь $\lambda_0 \in \Lambda(L_1)$. Это значит

$$L_1(\lambda_0)u = A_{11}u - \lambda_0 u - A_{12}R_{A_{22}}(\lambda_0)A_{21}u = o, \quad u \neq o \in h. \tag{10}$$

Вводя обозначения $u_1 = u$, $u_2 = -R_{A_{22}}(\lambda_0)A_{21}u$, перепишем равенство (10) в виде системы

$$A_{11}u_1 + A_{12}u_2 = \lambda_0 u_1,$$

$$A_{21}u_1 + A_{22}u_2 = \lambda_0 u_2,$$

т. е.

$$\Pi\hat{u} = \lambda_0 \hat{u},$$

где вектор $\hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ -R_{A_{22}}(\lambda_0)A_{21}u_1 \end{pmatrix} \neq \hat{o}$, так как $u_1 \neq o$

Значит, $\lambda_0 \in \Lambda(\Pi)$.

Если же $\lambda_0 \in \Lambda(L_2)$, то имеем

$$L_2(u) = A_{22}u - \lambda_0 u - A_{21}R_{A_{11}}(\lambda_0)A_{12}u = o, \quad u \neq o \in h.$$

Отсюда имеем

$$A_{11}u_1 + A_{12}u_2 = \lambda_0 u_1,$$

$$A_{21}u_1 + A_{22}u_2 = \lambda_0 u_2,$$

где

$$u_1 = -R_{A_{11}}(\lambda_0)A_{12}u, \quad u_2 = u.$$

В матричной форме

$$\Pi\hat{u} = \lambda_0 \hat{u},$$

где вектор $\hat{u} = \begin{pmatrix} -R_{A_{11}}(\lambda_0)A_{12}u \\ u \end{pmatrix}$ отличен от нулевого вектора, поскольку $u \neq 0$. Значит, $\lambda_0 \in \Lambda(\Pi)$. Таким образом, справедливо и обратное к (9) включение, и теорема доказана.

В гильбертовом пространстве h рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L(\lambda) = \lambda^2 I - \lambda(A_{11} + A_{22}) + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}). \tag{11}$$

Теорема 2. Если операторы $A_{ij}(i, j = 1, 2)$ попарно коммутируют, то спектры матричного оператора **П** и квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ совпадают, т. е.

$$\sigma(\Pi) = \sigma(L). \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим линейный матричный операторный пучок

$$\Pi-\lambda I=\begin{pmatrix} A_{11}-\lambda I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda I \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Поскольку элементы этой матрицы попарно коммутируют, то, как показал П. Халмош [1], для обратимости матричного оператора (13), т. е. для существования ограниченного обратного оператора $(\Pi-\lambda I)^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы был обратим формальный детерминант этой матрицы

$$\Delta(\lambda)=(A_{11}-\lambda I)(A_{22}-\lambda I)-A_{12}A_{21}, \tag{14}$$

который совпадает с квадратичным операторным пучком $L(\lambda)$. Таким образом, линейный матричный пучок (13) и квадратичный операторный пучок (11) одновременно обратимы или нет. Поэтому их резольвентные множества и, следовательно, спектры совпадают. Теорема доказана.

П. 2. В этом пункте мы находим некоторые достаточные условия на операторах $A_{ij}(i, j=1, 2)$, при которых матричный оператор Π является самосопряженным или подобен самосопряженному матричному оператору.

В гильбертовом пространстве H рассмотрим матричный оператор

$$G=\begin{pmatrix} I & O \\ U & I \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где U—произвольный линейный ограниченный оператор, действующий в h.

Легко проверить, что обратный оператор имеет вид

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} I & O \\ -U & I \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Построим оператор, подобный матричному оператору Π.

$$G\Pi G^{-1}=\begin{pmatrix} I & O \\ U & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -U & I \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} I & O \\ U & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}-A_{12}U & A_{12} \\ A_{21}-A_{22}U & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}-A_{12}U & A_{12} \\ UA_{11}-UA_{12}U+A_{21}-A_{22}U & UA_{12}+A_{22} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Положим $A_{12}=I$; $U=A_{11}$. Тогда

$$G\Pi G^{-1}=\begin{pmatrix} O & I \\ A_{21}-A_{22}A_{11} & A_{11}+A_{22} \end{pmatrix}=\mathbf{B}. \tag{18}$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. Если $A_{12}=I$, то матричный оператор Π подобен оператору $\mathbf{B}$.

В гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ рассмотрим новое скалярное произведение, заданное по формуле

$$[\hat{u}, \hat{v}]=(Du_1, v_1)+(u_2, v_2), \tag{19}$$

где

$$D=A_{21}-A_{22}A_{11}, \quad \hat{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, \quad \hat{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\in H.$$

Очевидно, что если оператор D равномерно положительно определенный, т. е. существует положительная постоянная $c>0$, так что $D\geqslant \alpha I$, то скалярное произведение (19) топологически эквивалентно исходному скалярному произведению в **H**.

Лемма 2. Если $A_{11}+A_{22}$—самосопряженный оператор, а $A_{21}-A_{22}A_{11}$—самосопряженный равномерно положительно определенный, то матричный оператор B является самосопряженным в **H** относительно скалярного произведения (19).

Доказательство. В самом деле для произвольных векторов $\hat{u}$, $\hat{v}\in$**H** имеем

$$[\mathbf{B}\hat{u},\ \hat{v}]=(Du_2,\ v_1)+(Du_1+Fu_2,\ v_2)=$$

$$=(Du_1,\ v_2)+(u_2,\ Dv_1+Fv_2)=[\hat{u},\mathbf{B}\hat{v}]. \tag{20}$$

Здесь $F=A_{11}+A_{22}$.

Из доказанных лемм непосредственно следует.

Теорема 3. Если $A_{12}=I$, операторы F и D являются самосопряженными в h, причем оператор D равномерно положительный, то матричный оператор **П** подобен самосопряженному оператору в **H**.

Теорема 4. Если существует такой самосопряженный в h оператор U, который коммутирует с самосопряженными операторами $F=A_{11}+A_{22}$ и $D=A_{21}-A_{22}A_{11}$ и удовлетворяет неравенству

$$T=-U^2+FU+D\geqslant\alpha I \qquad (\alpha>0), \tag{21}$$

то матричный оператор **П** подобен самосопряженному оператору в **H**.

Доказательство. Рассмотрим оператор C, который подобен матричному оператору **B**:

$$C=G^{-1}\mathbf{B}G=\begin{pmatrix}I&O\\-U&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&I\\D&F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&O\\U&I\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}I&O\\-U&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U&I\\D+FU&F\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U&I\\-U^2+FU+D&-U+F\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Вводим в **H** новое скалярное произведение по формуле

$$\{\hat{u},\ \hat{v}\}=(Tu_1,\ v_1)+(u_2,\ v_2), \tag{23}$$

которое топологически эквивалентно исходному скалярному произведению в **H**.

Матричный оператор C является самосопряженным относительно скалярного произведения (23). В самом деле для произвольных векторов $\hat{u}$ и $\hat{v}$ из **H** имеем

$$\{C\hat{u},\ \hat{v}\}=(T(Uu_1+u_2),\ v_1)+(Tu_1+(F-U)u_2,\ v_2)=$$

$$=(Tu_1,\ v_2+Uv_1)+(u_2,\ Tv_1+(F-U)v_2)=\{\hat{u},\ C\hat{v}\}. \tag{24}$$

Таким образом, оператор **B**, а в силу леммы I и матричный оператор **П** подобны самосопряженному оператору в гильбертовом пространстве **H**.

Замечание 1. Если A_{11}—оператор сжатия в $\mathfrak{h}$, т. е. $\|A_{11}\| \leq 1$, $A_{12}=\sqrt{I-A_{11}A_{11}^*}$, $A_{21}=A_{22}=O$, то матричный оператор (2) в этом случае является частичной изометрией в **H**, т. е. изометрическим оператором на ортогональном дополнении своего ядра, и его спектр совпадает с компактным подмножеством замкнутого единичного круга, содержащего начало координат [1]. Две частичные изометрии такого типа

$$\Pi=\begin{pmatrix} A_{11} & \sqrt{I-A_{11}A_{11}^*} \\ O & O \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \sqrt{I-B_{11}B_{11}^*} \\ O & O \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где A_{11} и B_{11}—обратимые операторы, унитарно эквивалентны тогда и только тогда, если унитарно эквивалентны A_{11} и B_{11}.

Замечание 2. Если $A_{12}=\sqrt{I-A_{11}A_{11}^*}$, $A_{21}=-\sqrt{I-A_{11}^*A_{11}}$ и $A_{22}=A_{11}^*$, то матричный оператор (2) является нормальным [1]. Это легко проверяется непосредственным вычислением.

Теорема 5. Для того чтобы матричный оператор (2) был вполне непрерывным в гильбертовом пространстве **H**, необходимо и достаточно, чтобы операторы $A_{ij}(i, j=1,2)$ были вполне непрерывными в $\mathfrak{h}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть **П**—вполне непрерывный оператор в **H**, тогда он слабо сходящуюся последовательность векторов $\hat{u}_n=\begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{pmatrix} \in H$ переводит в сильно сходящуюся последовательность $\Pi\hat{u}_n$. Пусть последовательность элементов $u_n \in \mathfrak{h}$ слабо сходится к нулю, т. е.

$$(u_n, u) \to o \quad \forall u \in \mathfrak{h} \quad (n \to \infty). \tag{26}$$

Тогда последовательности векторов $\hat{u}_n=\begin{pmatrix} u_n \\ o \end{pmatrix}$ и $\hat{v}_n=\begin{pmatrix} o \\ u_n \end{pmatrix}$ слабо сходятся к нулю в гильбертовом пространстве **H**. В самом деле, для произвольного вектора $\hat{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H$ имеем

$$\langle \hat{u}_n, \hat{u} \rangle = (u_n, u_1)+(o, u_2)=(u_n, u_1) \to o,$$

$$\langle \hat{v}_n, \hat{u} \rangle = (o, u_1)+(u_n, u_2)=(u_n, u_2) \to o \quad (n \to \infty). \tag{27}$$

Поэтому $\Pi\hat{u}_n$ и $\Pi\hat{v}_n$ сильно сходятся к нулю

$$\|\Pi\hat{u}_n\|_H^2=\langle \Pi\hat{u}_n, \Pi\hat{u}_n \rangle=(A_{11}u_n, A_{11}u_n)+$$
$$+(A_{21}u_n, A_{21}u_n)=\|A_{11}u_n\|_{\mathfrak{h}}^2+\|A_{21}u_n\|_{\mathfrak{h}}^2 \to o,$$

$$\|\Pi\hat{v}_n\|_H^2=\langle \Pi\hat{v}_n, \Pi\hat{v}_n \rangle=(A_{12}u_n, A_{12}u_n)+(A_{22}u_n, A_{22}u_n)=$$
$$=\|A_{12}u_n\|_{\mathfrak{h}}^2+\|A_{22}u_n\|_{\mathfrak{h}}^2 \to o \quad (n \to \infty). \tag{28}$$

Таким образом, $A_{ij}u_n$ ($i, j=1, 2$) сильно сходится к нулю в h. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть A_{ij} ($i, j=1, 2$) – вполне непрерывные операторы в h и пусть последовательность векторов $\hat{u}_n=\begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{pmatrix} \in H$ слабо сходится к нулевому вектору, т. е. для произвольного вектора $\hat{u} \in H$

$$\langle \hat{u}_n, \hat{u} \rangle=(u_1^{(n)}, u_1)+(u_2^{(n)}, u_2) \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{29}$$

Отсюда следует, что $u_1^{(n)}$ и $u_2^{(n)}$ слабо сходятся к нулю в h, и поэтому

$$\| A_{ij}u_1^{(n)}\|_h \to 0, \quad \|A_{ij}u_2^{(n)}\|_h \to 0 \qquad (i, j=1, 2) \quad (n \to \infty). \tag{30}$$

Таким образом

$$\|\Pi \hat{u}_n\|_H = \|A_{11}u_1^{(n)}+A_{12}u_2^{(n)}\|_h + \|A_{21}u_1^{(n)}+A_{22}u_2^{(n)}\|_h^2 \to 0$$

при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание 3. Из доказанной теоремы следует, что если один из компонентов A_{ij} матричного оператора **П** не является вполне непрерывным оператором в h (в частности, если один из компонентов A_{ij} равен тождественному оператору), то матричный оператор **П** также не является вполне непрерывным в гильбертовом пространстве **H**.

В заключение этого пункта мы сформулируем две теоремы о полноте корневых векторов для вполне непрерывного матричного оператора, которые являются некоторыми (хотя и формальными) обобщениями соответствующих теорем [2].

Теорема 6. Пусть при некотором $\varkappa (0 < \varkappa \leqslant 1)$ для самосопряженного оператора $F_1=-(A_{11}+A_{22})$ и вполне непрерывного положительного оператора $D_1=A_{22}A_{11}-A_{21}$ выполняются следующие соотношения:

$$1^\circ. \ F_1 \leqslant \varkappa \cdot D_1, \tag{31}$$

$$2^\circ. \ \lambda_n(D_1) = o(n^{-\frac{2\theta}{\pi}}), \quad n \to \infty, \tag{32}$$

где $\theta=\arcsin\varkappa \left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, тогда у матричного оператора (2) при $A_{12}=I$ имеется полная система корневых векторов в гильбертовом пространстве H.

Теорема 7. Пусть самосопряженный неотрицательный оператор $F_1=-(A_{11}+A_{22})$ имеет конечный след ($SpF_1 < \infty$) и имеет место равенство

$$\lim\inf n^2\lambda_n(D_1)=0, \tag{33}$$

тогда у матричного оператора (2) при $A_{12}=I$ имеется полная система корневых векторов в гильбертовом пространстве **H**.

Доказательство. Условия теорем 6 и 7 являются достаточными [2] для двукратной полноты системы собственных и присоединенных элементов квадратичного операторного пучка

$$L(\lambda)=\lambda^2 I+\lambda F_1+D_1, \tag{34}$$

который ассоциируется с операторной матрицей

$$B=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -F_1 & -D_1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Поскольку двукратная полнота системы собственных и присоединенных элементов квадратичного операторного пучка (34) эквивалентна полноте системы корневых векторов матричного оператора, а в силу леммы I матричные операторы **П** и **B** при $A_{12}=I$ подобны, то теоремы 6 и 7 доказаны.

Кафедра дифференциальных уравнений
и функционального анализа

Поступила 14.01.1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Халмош П.**, Гильбертово пространство в задачах, изд-во «Мир», 1970.
2. **Крейн М. Г. и Лангер Г. К.**, Тр. межд. симп. по прям. т. ф. к. п. в механике сплошной среды, изд-во «Наука», 1965.

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ

ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ (I)

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում հետազոտված է քառակուսային օպերատորային մատրիցի և նրա հետ կապված օպերատորային փնջերի սպեկտրալ կապը համապատասխան հիլբերտյան տարածություններում։