ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 1979 Естественные науки

Математика

Ю. Г. ДАДАЯН

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Работа посвящена построению вариационно-разностной схемы (ВРС) для двумерных линейных параболических уравнений с разрывными коэффициентами. Схема строится на нерегулярной сетке, которая топологически эквивалентна регулярной. Получены предельные по порядку оценки скорости сходимости в норме энергетического пространства и пространства L_2.

§ 1. Обозначения, построение ВРС

1. В цилиндрической области $Q=\Omega\times(0, T)$ с боковой поверхностью $\Gamma=S\times(0, T)$, где Ω— ограниченная односвязная область пространства R_2 точек $(x_1, x_2)\equiv(x, y)$ с гладкой границей S класса C^2, рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{2}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+au=f \tag{1}$$

с начальным и краевым условиями

$$u|_{t=0}=0,\ \left.\left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu,\ x_i)+\sigma u\right)\right|_{\Gamma}=0, \tag{2}$$

где ν—внешняя нормаль к S.

Пусть Λ замкнутая гладкая кривая класса C^2, лежащая внутри Ω и не имеющая с S общих точек; она разбивает Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2—внутреннюю и внешнюю соответственно.

Цилиндрическую область $\Omega_1\times(0, T)$ с боковой поверхностью $\Gamma_1=\Lambda\times(0, T)$ обозначим через Q_1, а область $Q\setminus Q_1$— через Q_2.

Пусть коэффициенты a_{ij} терпят конечный разрыв по пространственным переменным вдоль поверхности Γ_1 и при этом выполняются следующие условия:

$$a_{ij}\in C^{2,1}(Q_k),\ k=1,\ 2;\ b_i\in C^{1,0}(Q);$$

$$a\in C(Q);\ \sigma\in C^1(\Gamma);\ f\in L_2(Q); \tag{3}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\,\xi_i\xi_j \geqslant \mu_0 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2,\quad \mu_0=\text{const}>0.$$

Для уравнения (I) рассмотрим следующую начально-краевую задачу: найти функцию u, удовлетворящую в Q_1 и Q_2 уравнению (I), начальному и краевому условиям (2) и следующим условиям на поверхности Γ_1 разрыва коэффициентов a_{ij};

$$[u]_{\Gamma_1}=0,\quad \left[\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,\ x_i)\right]_{\Gamma_1}=0. \tag{4}$$

Здесь, например, $[u]_{\Gamma_1}$ означает скачок функции u при переходе через Γ_1; n—вектор внешней нормали к поверхности Γ_1.

Норму в $W_2^{m,n}(Q)$—пространстве Соболева-Слободецкого [I]—обозначим через $\|\ \|_{m,n,Q}$ (первый из двух верхних индексов указывает на гладкость по переменным x, y, а второй—на гладкость по t), норму в $L_2(Q)$—через $\|\cdot\|_{0,Q}$. Для простоты норму в пространстве $W_2^m(Q)$ обозначим через $\|\cdot\|_{m,Q}$.

Через $V_2^{1,0}(Q)$ обозначается пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(Q)$, имеющих конечную норму

$$|u|_Q=\sup_{0<t<T}\|u(t)\|_{0,\Omega}+\|\,|\nabla u|\,\|_{0,Q},$$

где

$$|\nabla u|=\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right)^{1/2}.$$

При указанных выше предположениях о данных задачи существует единственное обобщенное решение $u\in W_2^{1,1}(Q)$, удовлетворяющее тождеству

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t}\varphi dQ+L(u,\ \varphi)=\int_Q f\varphi dQ \tag{5}$$

при произвольной $\varphi\in W_2^{1,0}(Q)$, где

$$L(u,\ \phi)\equiv\int_Q\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{2} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\phi+au\phi\right)dQ+\int_\Gamma \sigma u\phi d\gamma.$$

Обобщенное решение нашей задачи обладает в Q_1 и Q_2 большей гладкостью, а именно принадлежит пространству $W_2^{2,1}(Q_k)$, $K=1, 2$, и справедливо неравенство

$$\|u\|_{2,1,Q_1}+\|u\|_{2,1,Q_2}\leqslant C\|f\|_{0,Q}^{*}. \tag{6}$$

Доказательство этого факта нетрудно привести, несколько видоизменив доказательство аналогичного утверждения для случая гладких коэффициентов, приведенного в [2].

* Буквой C здесь и везде ниже обозначаются различные положительные постоянные в неравенствах, не зависящие от h, τ и рядом стоящих множителей.

2. Зададимся малым параметром $h>0$, который назовем шагом сетки. Наложим на область Ω квадратную сетку шага h так, чтобы линии сетки были параллельны координатным осям.

Пусть $K(x, y)$—кривизна кривой Λ в точке (x, y). Обозначим через $K=\max\limits_{(x,y)\in\Lambda} |K(x, y)|$. В дальнейшем будем предполагать, что $h<\frac{1}{K}$. Назовем δ_x расстоянием от вершины квадрата до Λ вдоль оси x. Аналогично определим δ_y. Вершины квадратов, принадлежащие Ω_2 и такие, что $\delta_x<\frac{h}{2}$ или $\delta_y<\frac{h}{2}$, а также принадлежащие Ω_1 и такие, что $\delta_x\leqslant\frac{h}{2}$ или $\delta_y\leqslant\frac{h}{2}$, назовем подвижными. Следуем работе [3]. Проделаем следующие геометрические преобразования:

а) те квадраты, все вершины которых не являются подвижными, разобьем диагональю под углом $\frac{\pi}{4}$ к оси x на два треугольника;

б) все подвижные вершины перенесем на кривую Λ вдоль оси x, если $\delta_x\leqslant\delta_y$, и вдоль оси y, если $\delta_y<\delta_x$;

в) образы подвижных вершин, последовательно расположенные вдоль Λ, соединим отрезками прямой, в результате чего получим замкнутую линию, которую обозначим через Λ^h;

г) соединим отрезками прямых образы вершин квадрата, прообразы которых были соединены линиями сетки. Разобъем соответствующий четырехугольник наименьшей диагональю на два треугольника, если до этого он не был уже разбит на треугольники звеном ломаной Λ^h.

В качестве Ω^h возьмем наименьшее объединение треугольников, содержащее Ω. Область Ω^h удовлетворяет следующим условиям: 1) между точками Λ^h и Λ с помощью нормалей к Λ устанавливается взаимно однозначное соответствие; 2) длины звеньев ломаной Λ^h ограничены снизу величиной $\frac{h}{2}$; 3) расстояния точек Λ^h до Λ не превосходят величины δh^2, где δ—положительная постоянная, не зависящая от h; 4) область Ω^h состоит из треугольников, длины сторон которых лежат в пределах $\left[\frac{h}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}h\right]$, а площади—в пределах $\left[\frac{h^2}{8}, \frac{9}{8}h^2\right]$.

Совокупность вершин и сторон треугольников триангуляции образует сетку, вершины треугольников назовем узлами сетки. Будем считать, что все узлы сетки перенумерованы в некотором порядке. Через m обозначим m-й узел сетки (x_m, y_m). Границу области Ω^h обозначим через S^h, а через R^h—множество узлов, принадлежащих

$\overline{\Omega^h}$. Для каждого узла $(m)\in R^h$ определим функцию $\varphi_m(x, y)$, которая равна единице в узле (m), нулю в остальных узлах и восполнена кусочно-линейно в $\overline{\Omega^h}$ (см. [4]).

Обозначим через H^h множество всевозможных функций вида

$$\tilde{\omega}(x, y)=\sum_{(m)\in R^h}\omega_m\varphi_m(x, y), \quad \tilde{\omega}(x_m, y_m)=\omega_m.$$

Положим $Q^h=\Omega^h x(0, T)$. Разобьем промежуток $[0, T]$ на равные части с шагом τ точками деления $t_n=\tau n$, где $n=0, 1, \ldots, N$. Определим функции

$$\varphi_{mn}(x, y, t)=\begin{cases}\varphi_m(x, y, & \text{если } t\in(t_{n-1}, t_n]\\ 0, & \text{если } t\bar{\in}(t_{n-1}, t_n]\end{cases}$$

для $(m)\in R^h$ и $n=1, 2, \ldots, N$.

Пусть $\underline{\omega}=\{\omega_{mn}\}$—сеточная функция, заданная в точках (x_m, y_m, t_n). Определим функцию $\check{\omega}(x, y, t)$ следующим образом:

$$\check{\omega}(x, y, t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{(m)\in R^h}\omega_{mn}\varphi_{mn}(x, y, t). \tag{7}$$

Множество функций вида (7) обозначим через $H_{h\tau}$. В силу определения при любом $t\in(t_{n-1}, t_n]$

$$\check{\omega}(x, y, t)=\tilde{\omega}(x, y, t_n).$$

В качестве приближенного решения задачи возьмем функцию $\check{v}\in H_{h\tau}$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\tau\sum_{n=1}^{N}\int_{\Omega}(\tilde{\mathbf{v}}(t_n))_{\bar{t}}\,\tilde{\varphi}(t_n)d\Omega+L(\check{v}, \check{\varphi})=\int_{Q}f\check{\varphi}\,dQ \tag{8}$$

при произвольной $\check{\varphi}\in H_{h\tau}$, где $(\tilde{v}(t_n))_{\bar{t}}$ есть $\tau^{-1}(v(t_n)-v(t_{n-1}))$.

§ 2. Теорема аппроксимации и оценки скорости сходимости

Следующая лемма приведена и доказана в [5].

Лемма 1. Если $\psi\in W_2^2(\Omega_k)$, $k=1, 2$, то справедливы следующие оценки:

$$\||\nabla(\psi-\tilde{\psi})|\|_{0, \Omega_h}\leqslant Ch(\|\psi\|_{2, \Omega_1}+\|\psi\|_{2, \Omega_2}), \tag{9}$$

$$\|\psi-\tilde{\psi}\|_{0, \Omega_h}\leqslant Ch^2(\|\psi\|_{2, \Omega_1}+\|\psi\|_{2, \Omega_2}). \tag{10}$$

Через u^τ обозначим осреднение функции u вида

$$u^\tau(x, y, t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}u(x, y, \theta)d\theta.$$

Теорема 1. Пусть $u \in W_2^{2,1}(Q_k)$, где $k=1, 2$, $u/_{t=0}=0$ и продолжена через границу S с сохранением нормы и класса $W_2^{2,1}(Q_2)$, при этом, положим, $u\equiv 0$ при $t<0$. Тогда

$$|u-\check{u}^\tau|_{Q^h} \leq C(\tau^{\frac{1}{2}}+h+\tau^{-\frac{1}{2}}h^2)\sum_{k=1}^{2}\|u\|_{2,1,Q_k}, \quad (11)$$

$$\|u-\check{u}^\tau\|_{0,Q^h} \leq (\tau+h^2)\sum_{k=1}^{2}\|u\|_{2,1,Q_k}. \quad (12)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобится еще два типа продолжений функции u: первое продолжение из Q_1 в Q_2 с сохранением класса и нормы $W_2^{2,1}(Q_1)$, которое обозначим через u_1, второе—из Q_2 в Q_1 с сохранением класса и нормы $W_2^{2,1}(Q_2)$, которое обозначим через u_2.

Через Ω_1^h обозначим объединение тех треугольников, которые целиком содержатся в $\overline{\Omega_1}$, через $\Omega(\Lambda)$—тех треугольников, которые имеют непустое пересечение с Ω_1 и Ω_2. Пусть $\Omega_2^h=\Omega^h \setminus (\Omega_1^h \cup \Omega^h(\Lambda))$. Далее, $Q_k^h=\Omega_k^h X(0, T)$, $k=1, 2$, а $Q^h(\Lambda)=\Omega^h(\Lambda)X(0, T)$. Через $\Omega_k^h(\Lambda)$ обозначим множество всех тех треугольников из $\Omega^h(\Lambda)$, одна вершина которых лежит в Ω_k, а две другие—на Λ; ясно, что $\Omega^h(\Lambda)= =\Omega_1^h(\Lambda)\cup\Omega_2^h(\Lambda)$. Пусть $Q_k^h(\Lambda)=\Omega_k^h(\Lambda)X(0, T)$, где $k=1, 2$.

Начнем с оценки (11). По определению

$$|u-\check{u}^\tau|_{Q^h} = \sup_{0<t<T}\|u(t)-\check{u}^\tau(t)\|_{0,\Omega^h} + \||\nabla(u-\check{u}^\tau)|\|_{0,Q^h}. \quad (13)$$

Имеем равенство

$$\||\nabla(u-\check{u}^\tau)|\|^2_{0,Q^h} = \sum_{k=1}^{2}(\||\nabla(u-\check{u}^\tau)|\|^2_{0,Q_k^h}+\||\nabla(u-\check{u}^\tau)|\|^2_{0,Q_k^h(\Lambda)}). \quad (14)$$

По неравенству треугольника

$$\||\nabla(u-\check{u}^\tau)|\|_{0,Q_k^h} \leq \||\nabla(u-u^\tau)|\|_{0,Q_k^h} + \||\nabla(u^\tau-\check{u}^\tau)|\|_{0,Q_k^h}. \quad (15)$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (15):

$$\||\nabla(u-u^\tau)|\|_{0,Q_k^h} \leq \tau^{-\frac{1}{2}}\left\{\int_0^T\int_{\Omega_k^h}\int_{t-\tau}^{t}|\nabla(u(t)-u(\theta))|^2 d\theta d\Omega dt\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \tau^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_k^h}|\nabla(u(t)-u(\theta))|^2|t-\theta|^{-2}d\Omega d\theta dt\right\}^{1/2};$$

если теперь воспользоваться теоремой вложения [1], то получим неравенство

$$\||\nabla(u-u^\tau)|\|_{0,Q_k^h} \leq C\tau^{\frac{1}{2}}\|u\|_{2,1,Q_k}. \quad (16)$$

Теперь оценим второе слагаемое в правой части неравенства (15). Для этого обозначим u^τ через ω. Тогда

$$\| |\nabla(u^\tau - \check{u}^\tau)| \|^2_{0, Q_k^h} = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_k^h} |\nabla(\omega(t)-\omega(t_n))|^2 d\Omega dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_k^h} |\nabla(\omega(t)-\omega(t_n))|^2 d\Omega dt + \tag{17}$$

$$+2\tau\sum_{n=1}^{N} \int_{\Omega_k^h} |\nabla(\omega(t_n)-\tilde{\omega}(t_n))|^2 d\Omega \equiv I_1 + I_2.$$

Неравенство

$$I_1 \leqslant C\tau \| u \|^2_{2, 1, Q_k} \tag{18}$$

вводится также, как и неравенство (16). Далее, если воспользоваться оценкой (9), то

$$I_2 \leqslant C\tau h^2 \sum_{n=1}^{N} \| \omega(t_n) \|^2_{2, 0, \Omega_k};$$

отсюда нетрудно уже получить оценку

$$I_2 \leqslant Ch^2 \| u \|_{2, 0, \Omega_k}. \tag{19}$$

Из (17)—(19) получим

$$\| |\nabla(u^\tau - \check{u}^\tau)| \|_{0, Q_k^h} \leqslant C(h + \tau^{\frac{1}{2}}) \| u \|_{2, 1, Q_k}. \tag{20}$$

Таким образом, из (15), (16) и (20) следует, что

$$\| |\nabla(u - \check{u}^\tau)| \|_{0, Q_k^h} \leqslant C(h + \tau^{1/2}) \| u \|_{2, 1, Q_k}. \tag{21}$$

Так как $\check{u}^\tau - \check{u}_k^\tau \equiv 0$ в $\Omega_k^h(\Lambda)$, то

$$\| |\nabla(u - \check{u}^\tau)| \|_{0, Q_k^h(\Lambda)} \leqslant 2\int_0^T \sum_{\Delta \in \Omega_k^h(\Lambda)} \left(\int_{\Delta \cap \Omega_k} |\nabla(u - u_k)|^2 d\Omega + \right.$$

$$\left. + \int_\Delta |\nabla(u_k - \check{u}_k^\tau)|^2 d\Omega \right) dt.$$

Учитывая, что область $\Delta \cap \Omega_k$ попадает в полосу ширины $O(h^2)$, прилежащую к Λ, а также неравенство (20), получим [4]

$$\| \,|\nabla(u-\check{u}^{\tau})|\, \|_{0,\, Q_k^h(\Lambda)} \leqslant C(h+\tau^{1/2}) \sum_{k=1}^{2} \| u \|_{2,1,Q_k}. \tag{22}$$

Из (14), (21) и (22) получим

$$\| \,|\nabla(u-\check{u}^{\tau})|\, \|_{0,\, Q^h} \leqslant C(h+\tau^{1/2}) \sum_{k=1}^{2} \| u \|_{2,1,Q_k}. \tag{23}$$

Оценка же

$$\sup_{0<t<T} \| u(t)-\check{u}^{\tau}(t) \|_{0,\, Q^h} \leqslant C(\tau^{\frac{1}{2}}+h^2\tau^{-\frac{1}{2}}) \sum_{k=1}^{2} \| u \|_{2,1,Q_k} \tag{24}$$

выводится так же, как и оценка (23), даже еще проще.

Из (13), (23) и (24) следует оценка (11).

Аналогичным образом выводится и оценка (12). Теорема доказана.

Замечание. В дальнейшем будем предполагать, что $\tau=0(h^2)$. Как показано в [6], такое соотношение между τ и h является оптимальным.

Теорема 2. Пусть выполнены условия § 1, при которых обобщенное решение u задачи принадлежит пространству $W_2^{2,1}(Q_k)$, $k=1, 2$. Тогда приближенное решение $\check{v}$ задачи, определяемое тождеством (8), сходится к обобщенному так, что справедливы оценки

$$|u-\check{v}|_Q \leqslant C(T)h \, \| f \|_{0,Q}, \tag{25}$$

$$\| u-\check{u} \|_{0,Q} \leqslant C(T)h^2 \, \| f \|_{0,Q}, \tag{26}$$

где $C(T)$—положительная постоянная, экспоненциально возрастающая с возрастанием T.

Доказательство этой теоремы приводить не обязательно, так как оно в принципе не отличается от доказательства сходных теорем, приведенных в [7]. Дело в том, что теорема аппроксимации, полученная в настоящей работе, аналогична теореме, выведенной в [6].

§ 3. О методе решения ВРС

Опишем кратко метод простых итераций решения построенной неявной ВРС.

Обозначим через M число узлов сетки, множество которых образует R^h. Сеточную функцию v будем рассматривать как элемент векторного пространства R_M. Каждому вектору $v \in R_M$ однозначным образом ставится в соответствие восполняющая функция $\tilde{v} \in H^h$ и наоборот. Через $v^{(n)}$, где $n=0, 1, \dots, N$, будем обозначать вектор из R_M, определяемый функцией $\tilde{v}(x, y, t_n)$.

Тождество (8), посредством которого определяется приближенное решение, дает нам N систем линейных алгебраических уравнений

$$T^{(n)}v^{(n)}=Pv^{(n-1)}+r^{(n)}, \quad n=1, 2, \dots, N, \tag{27}$$

при этом $v^{(0)}$ в силу начального условия есть нулевой вектор. Матрицы $T^{(n)}$, P и вектор $r^{(n)}$ определяются из тождества (8).

Для решения системы (27) на n-ом слое запишем метод простых итераций:

$$E\frac{v_{k+1}^{(n)}-v_k^{(n)}}{\lambda}=-T^{(n)}v_k^{(n)}+Pv_q^{(n-1)}+r^{(n)} \tag{28}$$

$$\lambda>0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ q,\ \ldots,$$

где начальное приближение $v_0^{(n)}$ выбирается произвольно (относительно выбора матрицы E см. [4]).

Пользуясь результатами работы [8], можно показать следующее: если решать на каждом слое систему (27) методом простых итераций (28) и совершать при этом каждый раз q итераций, где $q=O(|\ln h|)$, то получим в итоге приближенное решение, которое аппроксимирует точное с тем же порядком малости, который дается оценками (25) и (26). Число арифметических действий при этом имеет порядок $h^{-4}|\ln h|$, т. е. почти оптимально по порядку.

В заключение хочу выразить благодарность Л. А. Оганесяну за внимание к работе и ценные советы.

Кафедра численного анализа *Поступила 12.09.1978*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Слободецкий Л. Н.**, Уч. зап. Ленингр. гос пед. ин-та им. А. И. Герцена, 197, 54—112, 1958.
2. **Ильин А. И., Калашников А. С., Олейник О. А.**, Успехи математ. наук, 17, вып. 3 (105), 3—146, 1962.
3. **Мацокин А. М.**, Автоматизация триангуляции областей с гладкой границей при решении уравнений эллиптического типа, Препринт ВЦ АН СССР, вып. 15, Новосибирск, 1975.
4. **Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А.**, Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1, вып. 5, Вильнюс, 1973.
5. **Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А.**, Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 2, вып. 8, Вильнюс, 1974.
6. **Акопян Ю. Р., Оганесян Л. А.**, ЖВМи МФ, 17, № 1, 109—118, 1977.
7. **Акопян Ю. Р. Оганесян Л. А.**, В сб. Вариационно-разностные методы решения задач математической физики, изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 27—36, 1976.
8. **Акопян Ю. Р.**, Докл. АН Арм. ССР, 1976, 62, № 4, 193—198, 1976.

ՅՈՒ. Գ. ԴԱԴԱՅԱՆ

ԽԶՎՈՂ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ՊԱՐԱԲՈԼԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ-ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է խզվող գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային պարաբոլիկ հավասարումների համար վարիացիոն-տարբերական սխեմայի կառուցմանը։ Սխեման կառուցվում է ոչ կանոնավոր ցանցում, որը սակայն տոպոլոգիորեն համարժեք է կանոնավորին։ Զուգամիտության արագության համար ստացված են ըստ կարգի սահմանային գնահատականներ էներգետիկ տարածության և L_2 *տարածության նորմայում։*