ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1987 Естественные науки

Физика

УДК 52--530.12

Р. М. АВАКЯН. А. В. САРКИСЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В БИМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

В работе приводятся решения уравнений биметрической теории тяготения в случае сферически-симметрического распределения масс для уравнения состояния $\rho = aP$. Показано, что достаточно провести одно численное интегрирование независимо от значения параметра a и давления в центре конфигурации. Для значения $a=\sqrt{12}-3$ получено аналитическое решение.

Введение. В теории тяготения Эйнштейна имеется несколько аналитических решений уравнений поля внутри распределения масс [1] для модельных уравнений состояния как имеющих физический смысл, так и лишенных его. Эти решения за редким исключением относятся к случаю сферически-симметрического распределения масс.

В биметрической теории тяготения, предложенной Розеном [2], насколько нам известно, аналитических внутренних решений нет. Более того, согласно Розену решения уравнений поля можно найти только путем многократных численных интегрирований с изменением значений компонент метрического тензора искривленной метрики в центре конфигурации с тем, чтобы обеспечить условия непрерывности этих компонент и их первых производных на границе конфигураций. Однако, как было показано в [3], путем введения новых переменных и переобозначения функций можно избавиться от повторения процедуры численного интегрирования и ограничиться лишь одним.

Ниже мы приведем решение уравнений Розена в случае модельного уравнения состояния вещества типа $\rho = aP$, где a—некоторая постоянная величина. При некотором значении этой величины можно получить аналитическое решение. Мы рассмотрим случай сферически-симметрического распределения вещества.

1. Рассмотрим статическое поле сферически распределенной материи. Воспользуемся изотропными координатами, тогда интервал для искривленной метрики можно записать в виде

$$ds^2 = e^{2\Phi}dt^2 - e^{2\psi}dr^2 - r^2e^{2\psi}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (1)$$

а для плоской метрики—

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (2)$$

где Φ и ψ—функции только от r (здесь и ниже выбирается система единиц, в которой $G=c=1$). При таком выборе метрик уравнения поля будут

$$\frac{d\Phi}{dr}=\frac{M}{r^2}, \tag{3}$$

$$\frac{dM}{dr}=4\pi e^{\Phi+3\psi}(\rho+3P)r^2, \tag{4}$$

$$\frac{d\psi}{dr}=-\frac{M_1}{r^2}, \tag{5}$$

$$\frac{dM_1}{dr}=4\pi e^{\Phi+3\psi}(\rho-P)r^2. \tag{6}$$

К этой системе необходимо добавить уравнение гидростатического равновесия

$$\frac{dP}{dr}=-(\rho+P)\frac{d\Phi}{dr}, \tag{7}$$

которое в случае выбранного уравнения состояния сразу интегрируется

$$P(r)=P_c\exp[(a+1)(\Phi_c-\Phi(r))], \tag{8}$$

где P_c и Φ_c—значения давления и коэффициента метрического тензора в центре конфигурации. Как следует из (8), давление оказывается равным нулю на бесконечности, т. е. радиус соответствующей конфигурации бесконечно велик. Этот результат обусловлен выбором уравнения состояния. Однако мы можем в качестве границы конфигурации выбрать поверхность сферы, на которой отношение $P(R_0)/P_c$ очень мало, и полученные решения сшить с решением уравнений Розена вне распределения масс [2]:

$$\Phi=-\frac{M}{r}, \qquad \psi=\frac{M_1}{r}, \qquad r>R_0, \tag{9}$$

где

$$M=4\pi\int_0^{R_0} e^{\Phi+3\psi}(\rho+3P)r^2dr, \tag{10}$$

$$M_1=4\pi\int_0^{R_0} e^{\Phi+3\psi}(\rho-P)r^2dr.$$

Здесь R_0—радиус конфигурации, M—масса, фиксируемая бесконечно удаленным наблюдателем, а M_1 фактически определяет число барионов конфигураций [4].

Разделив (4) на (6) и интегрируя, находим

$$M_1(r)=\frac{a-1}{a+3}M(r). \tag{11}$$

Аналогично из (3) и (5)—

$$\psi(r)-\psi_c=-\frac{a-1}{a+3}[\Phi(r)-\Phi_c]. \tag{12}$$

Итак, наша задача сводится к интегрированию следующей системы уравнений:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{m(x)}{x^2}, \quad \frac{dm(x)}{dx}=e^{-f(x)}x^2 \tag{13}$$

с начальными условиями $m(0)=0$, $F(0)=0$. Здесь $f=\alpha F$, $\widetilde{F}(x)=\Phi(x)-\Phi_c$, $M=\beta m$, $r=\gamma x$, где величины α, β и γ определяются из соотношений

$$\alpha=\frac{a^2+6a-3}{a+3}, \quad 4\pi\alpha^2\beta^2(a+3)P_c e^{\Phi_c+3\psi_c}=1, \tag{14}$$

$$\alpha\beta=\gamma.$$

Система уравнений (13) решается численно, начиная с центра конфигурации до поверхности, где внутреннее решение должно непрерывно перейти во внешнее. Из внешнего решения (9) для функций Φ и ψ на границе конфигурации имеем

$$R_0\Phi_1(R_0)+\Phi(R_0)=0,$$

$$R_0\psi_1(R_0)+\psi(R_0)=0.$$

Отметим одно важное обстоятельство. Переобозначение функций позволяет нам только одним численным интегрированием определить интегральные параметры конфигураций для любого значения постоянной a, связывающей давление с плотностью и для любого значения центральной плотности. Действительно, численное интегрирование системы уравнений (13) позволяет определить в точке $x_0=R_0/\gamma$ значения $m(x_0)$, $f(x_0)$ и $f_1(x_0)$. Зная эти величины и используя условия непрерывности, определяем

$$\Phi_c=-\frac{1}{\alpha}\left[f(x_0)+\frac{m(x_0)}{x_0}\right]. \tag{15}$$

$$\psi_c=-\frac{a-1}{a+3}\Phi_c.$$

Далее, задавая какое-либо значение параметру a и давлению в центре, определим введенные нами α, β и γ, т. е. массу, и радиус конфигурации для выбранного уравнения состояния и значения центрального давления.

На рис. 1 и 2 приведены зависимости величин $m(x)$ и $f(x)$ от x. Фиксируя значение постоянной a и задавшись определенным значением отношения $P(x_0)/P_c$, а также используя связь $f=\alpha F$, из (8) найдем значение $f(x_0)$. Далее, из рис. 2 определим соответствующие x_0, а из рис. 1 $m=m(x_0)$. Тогда (15) позволит определить Φ_c и ψ_c.

Теперь, задавая различные значения центрального давления P_c с помощью (14) и связей $M=\beta m(x_0)$ и $R=\gamma x_0$ и (11), определим значения истинных интегральных параметров конфигурации в зависимости от P_c.

Система уравнений (13) в случае значений $x \lesssim 1$ имеет приближенное аналитическое решение:

$$m=\sin x-x\cos x, \quad f(x)=1-\frac{\sin x}{x}. \tag{16}$$

В случае же $x>30$ имеется следующее аналитическое решение:

$$m(x)=2x, \quad f(x)=\ln\frac{x^2}{2}. \tag{17}$$

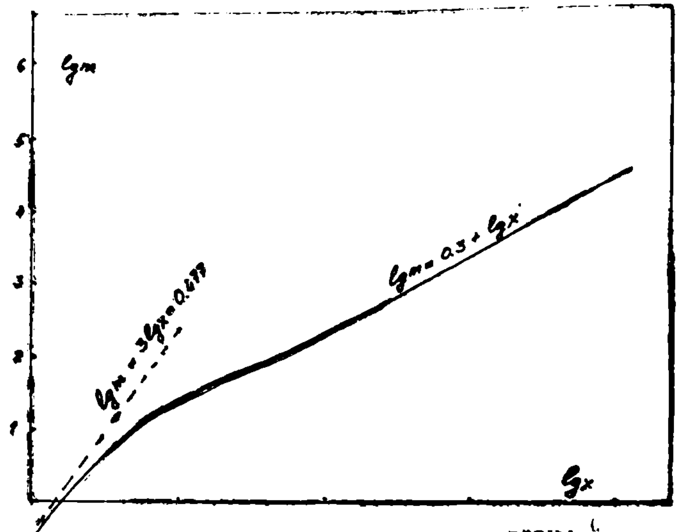

Рис. 1. Зависимость распределения массы от радиуса x.

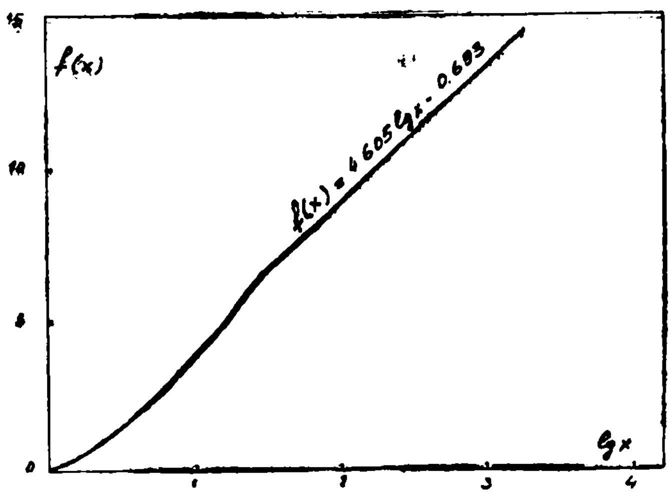

Рис. 2. Зависимость функции f от x.

Отметим, что решение (17) является точным частным решением системы (13). Однако при $x \to 0$ оно не удовлетворяет физическому условию $f \to 0$.

Известно [4], что в биметрической теории тяготения радиус конфигурации R может быть как больше, так и меньше величины $r_g=2M$. В случае используемого нами уравнения состояния и при условии, когда выполняется (17), т. е. $x_0 \gg 1$, имеем

$$\frac{r_g}{R}=\frac{4(a+3)}{a^2+6a-3}. \tag{18}$$

Для $a=3$ (идеальный газ) $R=r_g$. В случае $1<a<3$ получаются компактные конфигурации $R<r_g$, причем чем «жестче» уравнение состояния $a\to 1$, тем конфигурации компактнее. При $a>3$ имеем $R>r_g$.

Приведенные здесь соображения верны для всех значений параметра α, за исключением $\alpha=0$, т. е. $a=\sqrt{12}-3=0{,}464$. В этом случае система уравнений (13) запишется в виде

$$\frac{dF}{dx}=\frac{m}{x^2}, \quad \frac{dm}{dx}=x^2, \tag{19}$$

а

$$M=\frac{e^{-(\Phi_c+3\psi_c)}}{\sqrt{4\pi P_c(a+3)}}m, \quad R=\frac{e^{-(\Phi_c+3\psi_c)}}{\sqrt{4\pi P_c(a+3)}}x,$$

$$\Phi_c=-[x_0F_1(x_0)+F(x_0)], \quad \psi_c=-\frac{a-1}{a+3}\Phi_c.$$

Интегрирование системы (19) дает

$$m=\frac{x^3}{3}, \quad F_1=\frac{x}{3}, \quad F=\frac{x^2}{6}, \tag{20}$$

$$\Phi_c=-\frac{x_0^2}{2}, \quad \psi_c=-0{,}0774x_0^2.$$

Тогда для массы и радиуса конфигурации имеем

$$M=\frac{0.05x_0^3}{\sqrt{P_c}}e^{0.732x_0^2}, \quad R=\frac{0.1516}{\sqrt{P_c}}e^{0.732x_0^2}x_0, \tag{21}$$

а отношение $r_g/R=0{,}66x_0^2$, т. е. начиная с $x_0=1{,}23$, для этих конфигураций $R<r_g$.

Полученное в работе аналитическое решение является единственным внутренним решением в теории Розена и может оказаться полезным при расчете интегральных параметров конфигураций.

В заключение выражаем благодарность участникам семинара кафедры теоретической физики за обсуждения.

Кафедра теоретической физики *Поступила 25.06.1986*

ЛИТЕРАТУРА

1. Точные решения уравнений Эйнштейна (под редакцией Шмутцера), М.: Энергоиздат, 1982.
2. *Rosen N.*, On the bimetric Theory of Gravitation. — Ann. of. Phys., 1974, v. 84, p. 445.
3. *Авакян Р. М., Хачатрян Б. В., Чубарян Э. В.* К биметрической теории Розена, Труды IV семинара Центрального института астрофизики АН ГДР, 1980, с. 1.
4. *Sarkissian A. V., Avakian R. M., Karapetian V. T.*, On the singularity in BTG. — Astrophys. and Sp. Sci., 1985, v. 111, p. 197.

Ամփոփում

Աշխատանքում բերված են ձգողության բիմետրիկ տեսության հավասարումների լուծումները նյութի կենտրոնահամաչափ ցաշխման դեպքում $\rho = aP$ վիճակի հավասարման համար։ Ցույց է տված, որ բավական է կատարել միայն մեկ թվային ինտեգրում անկախ a պարամետրի և կոնֆիգուրացիայի կենտրոնում ճնշման արժեքներից։ Ստացված է անալիտիկ լուծում $a = \sqrt{12} - 3$ արժեքի դեպքում։

Summary

The solutions of problems on the bimetric theory of gravitation for the case of spherical-symmetric distribution of matter are gi ven in the paper for the equation of $\varrho = aP$ state. It has been shown that one needs only one numerical integration indipendent of a and the value of the pressure in the centre of the configuration. Analytical solutions have been obtained for $a = \sqrt{12} - 3$.