ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА 2016

труды международной школы-конференции молодых ученых,

3-7 октября 2016, Цахкадзор, Армения

При финансовой поддержке Государственного
комитета по науке МОН РА

ЕРЕВАН – 2016

Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Институт механики НАН РА
Институт проблем механики РАН
Ереванский государственный университет
Национальный университет архитектуры и строительства Армении

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Редакторы: Ж.А.Авдалян и С.С.Овсепян

В сборник включены доклады, представленные на международную школу-конференцию молодых учёных «Механика 2016»

ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ 2016

Երիտասարդ գիտնականների միջազգային դպրոց - գիտաժողովի նյութեր

3-7 հոկտեմբերի 2016, Ծաղկաձոր, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2016

INSTITUTE OF MECHANICS
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS **2016**

Proceedings of International School-Conference of Young Scientists

3-7 October, 2016, Tsakhkadzor, Armenia

YEREVAN – 2016

ВОЛНЫ В СЛОЕ С УПРУГО-СТЕСНЁННЫМИ ГРАНИЦАМИ

Саркисян А.С., Саркисян С.В.

Исследована задача о распространении периодических волн в упругом слое. Предполагается, что на границах слоя нормальное и касательное напряжения стеснённы. Для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний получены характеристические уравнения. Рассмотрены предельные случаи и приведены числовые расчёты для фазовой скорости волны.

1. Рассмотрим упругий изотропный слой толщиной 2h. Слой в прямоугольной декартовой системе координат $0xyz$ занимает область $x, y \in (-\infty, \infty), z \in [-h, h]$. В этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c. Ниже рассмотрим плоскую задачу: $\vec{u}\left(u(x,z,t), 0, w(x,z,t)\right)$, где u, w– проекции упругих перемещений по направлению на координатные оси x, z соответственно.

При помощи преобразований

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.1}$$

система динамических уравнений теории упругости приводится к автономным волновым уравнениям относительно динамических потенциалов $\varphi(x,z,t)$ и $\psi(x,z,t)$ [1]:

$$c_1^2 \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad c_2^2 \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{1.2}$$

Примем, что на плоскостях $z = \pm h$, ограничивающий слой, заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{zz} = -\alpha w, \quad \sigma_{zx} = -\beta u \quad (\alpha, \beta > 0). \tag{1.3}$$

Условия (1.3) были предложены Миндлином [2, 3] для исследования задачи отражения упругой волны от границы полупространства. В работе [4] М.В. Белубекяном исследованы условия существования волн Рэлея в случае упруго-стеснённой границы. Распространение периодических волн в упругом слое исследована в [6]. Предполагается, что на границах слоя нормальное напряжение равно нулю, а касательное напряжение стеснённо.

В частном случае при $\alpha = \beta = 0$ получаются условия свободной границы.

С использованием закона Гука и преобразования (1.1) граничные условия (1.3) при $z = \pm h$ приводятся к виду:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} + \alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0, \tag{1.4}$$

$$\mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) \mp \beta\frac{\partial\varphi}{\partial x} \pm \beta\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$$

Поставим следующую задачу. Найти решения двумерных волновых уравнений (1.2), удовлетворяющих граничным условиям (1.4).

Решения уравнений (1.2) можно представить в виде [1]:

$$\varphi = \left(A\,\mathrm{sh}(\nu_1 z) + B\,\mathrm{ch}(\nu_1 z)\right)\exp ik(x - ct),$$

$$\psi = \left(C\,\mathrm{sh}(\nu_2 z) + D\,\mathrm{ch}(\nu_2 z)\right)\exp ik(x - ct), \tag{1.5}$$

где *A*, *B*, *C* и *D* – произвольные постоянные, $\nu_1^2 = k^2\left(1-\eta\theta\right)$, $\nu_2^2 = k^2\left(1-\eta\right)$, $c_1^2 = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}$,

$c_2^2 = \dfrac{\mu}{\rho}$, $\theta = \dfrac{c_2^2}{c_1^2}$, $\eta = \dfrac{\omega^2}{k^2 c_2^2}$.

Подставляя (1.5) в граничные условия (1.4), получим систему четырёх линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Приравнивание определителя этой системы уравнений к нулю приводит к характеристическому уравнению, из которого при заданных значениях ρ, μ, λ, α, β и ω можно найти фазовую скорость *c*. Упростим задачу, рассмотрев две системы частных решений:

$$\varphi_1 = B\,\mathrm{ch}\left(\nu_1 z\right)\exp ik\left(x-ct\right),\ \psi_1 = C\,\mathrm{sh}\left(\nu_2 z\right)\exp ik\left(x-ct\right), \tag{1.6}$$

$$\varphi_2 = A\,\mathrm{sh}\left(\nu_1 z\right)\exp ik\left(x-ct\right),\ \psi_2 = D\,\mathrm{ch}\left(\nu_2 z\right)\exp ik\left(x-ct\right). \tag{1.7}$$

Решение (1.6) соответствует симметричному виду колебаний, а решение (1.7) – антисимметричному виду колебаний. При (1.6) перемещение u, напряжение σ_{zz} симметричны; перемещение w, напряжение σ_{zx} антисимметричны относительно плоскости $z=0$; а при (1.7) перемещение u, напряжение σ_{zz} антисимметричны; перемещение w, напряжение $\pm_{zx}$ симметричны относительно плоскости $z=0$ [1].

Подставляя (1.6) в граничные условия (1.4), при $z=h$ получим систему двух уравнений:

$$\begin{gathered}
B\left(\left(2-\eta\right)\mathrm{ch}\left(\nu_1 h\right)-\alpha_0\nu_1\,\mathrm{sh}\left(\nu_1 h\right)\right)+Ci\left(2\sqrt{1-\eta}\ \mathrm{ch}\left(\nu_2 h\right)-\alpha_0\,\mathrm{sh}\left(\nu_2 h\right)\right)=0,\\
\left(2\sqrt{1-\eta\theta}\,\mathrm{sh}\left(\nu_1 h\right)-\beta_0\,\mathrm{ch}\left(\nu_1 h\right)\right)iB+\left(\left(\eta-2\right)\mathrm{sh}\left(\nu_2 h\right)+\right.\\
\left.+\beta_0\sqrt{1-\eta}\,\mathrm{ch}\left(\nu_2 h\right)\right)C=0,
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где $\beta_0 = \dfrac{\beta}{\mu k}, \alpha_0 = \dfrac{\alpha}{\mu k}$.

Из равенства нулю детерминанта системы уравнений (1.8) получим следующее уравнение относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости η:

$$\begin{gathered}
\left(2-\eta\right)^2\mathrm{th}\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)-4\sqrt{\left(1-\eta\right)\left(1-\eta\theta\right)}\ \mathrm{th}\left(kh\sqrt{1-\eta\theta}\right)+\beta_0\eta\sqrt{1-\eta}+\\
+\alpha_0\eta\sqrt{1-\eta\theta}\,\mathrm{th}\left(kh\sqrt{1-\theta\eta}\right)\mathrm{th}\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)+\alpha_0\beta_0\left(\sqrt{\left(1-\eta\right)\left(1-\eta\theta\right)}\,\mathrm{th}\left(kh\sqrt{1-\theta\eta}\right)-\right.\\
\left.-\mathrm{th}\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)\right)=0.
\end{gathered} \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) при $\alpha_0=\beta_0=0$ совпадает с дисперсионным уравнением Рэлея–Лэмба [1].

2. Рассмотрим предельные случаи.

Пусть длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя *2h*. Тогда из уравнения (1.9) получим:

$$\begin{gathered}
\left(2-\eta\right)^2-4\sqrt{\left(1-\eta\right)\left(1-\eta\theta\right)}\ +\beta_0\eta\sqrt{1-\eta}+\alpha_0\eta\sqrt{1-\eta\theta}+\\
+\alpha_0\beta_0\left(\sqrt{\left(1-\eta\right)\left(1-\eta\theta\right)}-1\right)=0.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) при $\alpha_0=\beta_0=0$ совпадает с классическим уравнением Рэлея [1]. В отличие от уравнения Рэлея, уравнение (2.1) – дисперсионное, т.е. фазовая скорость η зависит от волнового числа k. При $\alpha_0=0$ или $\beta_0=0$ уравнение (2.1) приводится к аналогичным уравнениям, исследованным в работе [4].

Уравнение (2.1) имеет корень $\eta=0$, которому соответствует тривиальное решение. Следуя работе [5] , исключая корень $\eta=0$, уравнение (2.1) сводится к виду:

$$S(\eta) \equiv \eta - \frac{(1-\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta}+\sqrt{1-\theta\eta}}(4-\alpha_0\beta_0) + \beta_0\sqrt{1-\eta} + \alpha_0\sqrt{1-\theta\eta} - \alpha_0\beta_0 = 0. \quad (2.2)$$

Исследуем свойства функции $S(\eta)$. $S(\eta)$ при $\eta = 0$ и $\eta = 1$ принимает следующие значения:

$S(0) = -0.5(1-\theta)(4-\alpha_0\beta_0) + \alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0\beta_0,$

$S(1) = 1 + \alpha_0\sqrt{1-\theta} - \alpha_0\beta_0.$

Уравнение (2.2) будет иметь решение в интервале $\eta \in (0,1)$, если $S(0) < 0, S(1) > 0.$ При этом, решение будет единственным, если $\frac{dS}{d\eta} > 0.$ Выбирая значения α_0 и β_0, удовлетворяющие данным условиям, можно получить значения фазовой скорости поверхностной волны в зависимости от степени стеснённости поверхности полупространства.

α_0	β_0	η
0	0	0.8464
0	0.2	0.8132
0	0.4	0.7672
0	0.6	0.7013
0	0.8	0.6032
0	1	0.4532
0.2	0	0.7765
0.4	0	0.6888
0.6	0	0.5819
0.8	0	0.4545
1	0	0.3054
0.2	0.2	0.7427
0.4	0.4	0.6108
0.6	0.6	0.4479
0.8	0.8	0.2497
1	1	0.0099

В таблице приводятся численные результаты, вычисленные по уравнению (2.2) для параметра η, характеризующего квадрат фазовой скорости поверхностной волны в зависимости от параметров, характеризующих степень стеснённости поверхности полупространства (θ =0.33).

Если длина волны $l = \frac{2\pi}{k}$ очень велика по сравнению с толщиной слоя, то величины $\nu_1 h$ и $\nu_2 h$ будут малы при конечном значении *c*. Заменяя в уравнении (1.9) гиперболические тангенсы их аргументами, получим:

$$c = \frac{c_2}{c_1}\sqrt{\frac{4\left(c_1^2 - c_2^2\right) - kh\alpha_0 c_1^2}{1 - kh\alpha_0 \frac{c_2^2}{c_1^2}} - \frac{\beta_0 c_1^2}{kh}}. \quad (2.3)$$

Если $\mu = \lambda$ $\left(\nu = \frac{1}{4}\right)$, то $c_1^2 = 3c_2^2$ и из формулы (2.3) получим:

$$c = c_2\sqrt{\frac{8 - 3kh\alpha_0}{3 - kh\alpha_0} - \frac{\beta_0}{kh}}. \quad (2.4)$$

В общем случае симметричных колебаний, фазовую скорость (c) требуется определить из полного дисперсионного уравнения (1.9).

Перейдём к колебаниям, выраженными формулами (1.7). Удовлетворяя решения (1.7) граничным условиям (1.4), для антисимметричных колебаний получим следующее характеристическое уравнение относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости η:

$$(2-\eta)^2 \operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)-4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\eta\theta}\right)+\beta_0\eta\sqrt{1-\eta}+$$
$$+\alpha_0\eta\sqrt{1-\eta\theta}\operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\theta\eta}\right)\operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)+\alpha_0\beta_0\left(\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\theta\eta}\right)-\right. \quad (2.5)$$
$$\left.-\operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)\right)=0.$$

В предельном случае, когда длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя и при $kh\to\infty$, $c<c_2<c_1$ уравнение (2.3) сводится к уравнению (2.1), которое характеризует поверхностные волны Рэлея для упруго-стеснённой границы. При другом предельном случае из уравнения (2.3) можно определить фазовую скорость волн изгиба антисимметричных колебаний.

Таким образом, для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний слоя с упруго-стесненными границами выведены дисперсионные уравнения и показано влияние коэффициента стеснённости на фазовую скорость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
2. Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides. North–Holland, 1984, 618p.
3. Mindlin R.D. Waves and Vibrations in Isotropic Elastic Plates. In «Structural Mechanics», J.N. Coodier and N.J. Hoff, eds, Pergamon Press, New York, 1960, p.199-232.
4. Белубекян М.В. Волна Рэлея в случае упруго-стеснённой границы. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С.3-6.
5. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. //В сб.: «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела». Ереван: Институт механики НАН Армении, 1997. С.79-100.
6. Саркисян А.С., Саркисян С.В. Распространение волн в слое с упруго-стеснёнными границами.//В сб.тр. IV Международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 21-26 сентября 2015 г., Цахкадзор, Армения, с.362-364.

Сведения об авторах:

Саркисян Арег Самвелович – магистрант ЕГУ .

Саркисян Самвел Владимирович – доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики.
Адрес: ул. Алека Манукяна 1, ЕГУ, Ереван, Армения
Тел.: (+37455) 73-13-13, **E–mail:** vas@ysu.am

О Г Л А В Л Е Н И Е