ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1993 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

В.С. САРКИСЯН, В.Е. АВЕТИКЯН, З.Ш. САЛЕХ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ КОНСОЛИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрена задача изгиба неоднородной ортотропной консоли прямоугольного сечения. Предложен способ, позволяющий решать эту задачу, когда упругие характеристики зависят от одной координаты.

Исследованию задач изгиба анизотропных стержней посвящено много работ. В основном эти исследования проведены для однородных тел. (Подробный обзор см. в [1-4]).

Здесь предлагается способ решения задачи изгиба ортотропной неоднородной консоли прямоугольного сечения, когда упругие характеристики зависят лишь от одной координаты.

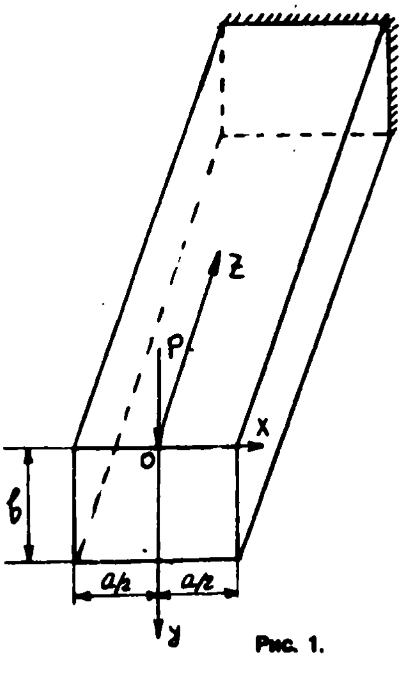

Рис. 1.

1. Постановка задачи. Пусть имеем призматический стержень, изготовленный из ортотропного неоднородного материала. Примем далее, что силы, действующие на свободном конце, статически эквивалентны одной равнодействующей P, направленной по оси y (см. рис.).

Предполагается также, что плоскости упругой симметрии нормальны граням прямоугольного параллелепипеда, модули E_3, G_1 и G_2 зависят только от координаты y, а коэффициенты Пуассона ν_{31} и ν_{32} постоянны.

Уравнение равновесия рассматриваемого тела для поставленной задачи имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+E_3(y)(B_1 y+C_1)=0. \tag{1.1}$$

Постоянные B_1 и C_1 определяются по заданному модулю $E_3(y)$ из уравнения равновесия в поперечных сечениях, имеющих вид

$$\iint \sigma_z dxdy=0, \qquad \iint \sigma_z ydxdy=-P_z, \tag{1.2}$$

где σ_z — нормальное напряжение в поперечном сечении

$$\sigma_z=E_3(y)(B_1 y+C_1)\,z. \tag{1.3}$$

Тогда компоненты касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} определяются по формулам

$$\tau_{yz}=-\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \tau_{xz}=\frac{\partial \psi}{\partial y}-E_3(y)(B_1 y+C_1)x. \tag{1.4}$$

Здесь $\psi(x,y)$ функция напряжения, которая в рассматриваемом случае удовлетворяет следующему уравнению [I]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G_1}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G_2}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=x\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E_3}{G_2}(B_1 y+C_1)\right]-2xB_1\nu_{31}. \tag{1.5}$$

Граничное условие для $\psi(x,y)$ имеет вид

$$\psi=\int_0^s E_3(y)(B_1 y+C_1)xdy=0. \tag{1.6}$$

Итак, задача сводится к решению краевой задачи (1.5)-(1.6).

2. Метод решения задачи. Изложим метод решения краевой задачи (1.5)-(1.6). Этим способом решена задача кручения неоднородных ортотропных стержней [5]. Для этой цели разложим правую часть уравнения (1.5) в ряд Фурье, после чего ищем решение в виде ряда

$$\psi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}y_k(y)\sin\frac{2\pi k}{a}x. \tag{2.1}$$

Неизвестные функции $y_k(y)$ определяются из следующего дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\frac{1}{k^2}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{G_2}\frac{dy_k}{dy}\right)-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\frac{1}{G_1}y_k(y)=$$

$$=\frac{a(-1)^k}{\pi k}\left\{2B_1\nu_{31}-\frac{d}{dy}\left[\frac{E_3}{G_2}(B_1y+C_1)\right]\right\}\quad (k=1,2,3,\cdots). \tag{2.2}$$

Из (1.6) при помощи (2.1) легко находим, что

$$y_k(0)=y_k^{\prime}(b)=0 \qquad (k=1,2,3,\cdots). \tag{2.3}$$

Представим решение краевой задачи (2.2)-(2.3) в виде

$$y_k(y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}d_{mk}\sin\frac{\pi m}{b}y. \tag{2.4}$$

Заранее функции $G_1^{-1}(y)$, $G_2^{-1}(y)$ и $\frac{E_3}{G_2}(B_1y+C_1)$ разложим в ряды Фурье по косинусам

$$\frac{1}{G_1(y)}=a_{44}(y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n}{b}y,$$

$$\frac{1}{G_2(y)}=a_{55}(y)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos\frac{\pi n}{b}y, \tag{2.5}$$

$$\frac{E_3(y)(B_1y+C_1)}{G_2(y)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\cos\frac{\pi n}{b}y.$$

Далее, разлагая $2B_1\nu_{31}$ в ряд Фурье по синусам и подставляя (2.4)-(2.5) в (2.2), для определения неизвестных коэффициентов d_{mk} получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$d_{qk}=\sum_{m=1}^{\infty}C_{mq}d_{mk}+f_{qk} \qquad \begin{matrix}(k=1,2,3,\cdots),\\ (q=1,2,3,\cdots),\end{matrix} \tag{2.6}$$

где
$$C_{mq}=-\frac{q(b_{q-m}+b_{q+m})}{m^3b^2k^2}+4\frac{a_{q+m}-a_{q-m}}{a^2m^4}, \qquad q>m,$$

$$C_{mq}=-\frac{q(b_{m-q}+b_{m+q})}{m^3b^2k^2}+4\frac{a_{q+m}-a_{m-q}}{a^2m^4}, \qquad q<m,$$

$$C_{mq}=C_{mm}=1-\frac{2b_0}{m^3b^2k^2}-\frac{8a_0}{a^2m^4}, \qquad q=m,$$

$$f_{qk}=-\frac{2a(-1)^k}{\pi^3k}\left[\frac{8}{\pi q}B_1\nu_{31}(1-(-1)^q)+\frac{\pi q}{b}dq\right].$$

Для C_{mq} аналогично [5] получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}|C_{mq}|<1, \qquad (q=1,2,3,\cdots), \tag{2.7}$$

а для f_{qk} будем иметь

$$|f_{qk}|<\frac{32a}{\pi^4}+\frac{2a}{\pi^2 b}. \tag{2.8}$$

Учитывая (2.7) и (2.8), можем утверждать, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.6) является регулярной системой для каждого k $(k=1,2,3,\cdots)$ [6].

Итак, имея решения уравнений (2.6), можно по формулам (1.3) и (1.4) определить компоненты напряжений.

3. Конкретный пример. Пусть функция $E_3(y)$ линейна. Тогда

$$E_3(y)=E_3(h_1 y+h_2), \tag{3.1}$$

где E_3, h_1 и h_2 — заданные постоянные величины. Подставляя (3.1) в (1.3), далее полученное выражение для σ_z в (1.2), для постоянных B_1 и C_1, получим

$$B_1=-\frac{12P}{E_3 ab^3}\frac{3(h_1 b+2h_2)}{h_1^2 b^2+6h_1 h_2 b+6h_2^2},$$

$$C_1=\frac{12P}{E_3 ab^2}\frac{2h_1 b+3h_2}{h_1^2 b^2+6h_1 h_2 b+6h_2^2}.$$

Далее, пусть $G_1(y)=G_2(y)=\frac{G}{1+y}$, тогда для коэффициентов a_n, b_n и d_n получим

$$a_0=b_0=\frac{1}{G}\left(1+\frac{b}{2}\right),$$

$$a_n=b_n=-\frac{2b}{\pi^2 n^2 G}[1-(-1)^n],$$

$$d_0=\frac{E_3}{12G}\Big\{3h_1 B_1 b^3+4(h_1 B_1+B_1 h_2+h_1 C_1)b^2+$$

$$+6(B_1 h_2+h_1 C_1+h_2 C_1)b+12h_2 C_1\Big\},$$

$$d_n=\frac{E_3}{G}\left\{h_1 B_1\left[\frac{6b^3}{\pi^2 n^2}(-1)^n+\frac{12b^3}{\pi^4 n^4}[1-(-1)^n]\right]+\right.$$

$$+(h_1B_1+h_2B_1+h_1C_1)\frac{4b^2}{\pi^2 n^2}(-1)^n-$$

$$-(B_1h_2+h_1C_1+h_2C_1)\frac{2b}{\pi^2 n^2}[1-(-1)^n]\Big\}.$$

Ниже приведена таблица максимальных касательных напряжений, полученных для разных значений геометрических и физических параметров консоли: $h_1=1$, $h_2=1$.

a/b \ E_1/G	50	25	12,5
1	−176	−201	−248
0,5	−352	−403	−496

Кафедра механики сплошной среды

Поступила 28.09.1992

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М: Изд-во «Наука», 1977.
2. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд-во ЕГУ, 1976.
3. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976.
4. Саркисян В.С. Некоторые современные вопросы механики анизотропных и неоднородных структур. Межвузовский сб. научных трудов: Механика, Изд-во ЕГУ, 1986, вып. 5.
5. Саркисян В.С., Аветикян В.Е., Салех Э.Ш., Битар М. Об одном способе решения задач кручения ортотропного неоднородного стержня. — Межвузовский сб. научных трудов: Механика, Ер.: Изд-во ЕГУ, 1991, вып. 8.
6. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Изд-во Физ.-мат. литературы, 1962.

Վ.Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Վ.Ե. ԱՎԵՏԻՔՅԱՆ, Է.Շ. ՍԱԼԵԽ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՀԵԾԱՆԻ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է ուղղանկյուն կտրվածքով անհամասեռ օրթոտրոպ հեծանի ծռման խնդիրը: Առաջարկված է մի միջոց, որը թույլ է տալիս լուծել այդ խնդիրը, երբ առաձգական բնութագրիչները կախված են մեկ կոորդինատից:

V.S. SARKISIAN, V.E. AVETIKIAN, E.S. SALEKH

ON A METHOD OF SOLVING THE BENDING PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC CANTILEVER BEAM WITH RECTANGULAR CROSS-SECTION

Summary

The bending problem for anisotropic inhomogeneous cantilever beam is considered in the paper. A method is suggested which makes it possible to solve this problem when elastic characteristics depend only on one coordinate.