ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1988 Естественные науки

Математика

УДК 519.217

Т. А. ТЕРЗЯН

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ПОД ВЛИЯНИЕМ ОДНОРОДНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

В настоящей работе доказывается предельная теорема для случайных процессов, определяемых динамической системой, находящейся под влиянием однородного марковского процесса.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dX_\varepsilon(t)}{dt}=AX_\varepsilon(t)+b\left(y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right),\quad X_\varepsilon(0)=x_0. \tag{1}$$

Здесь $A=\{a^{ij}\}$—матрица $n\times n$ с постоянными коэффициентами, $X_\varepsilon(t)$ $(t>0)$—n-мерный вектор, $b(y)$ $(y\in R^m)$—n-мерный вектор, $y(t)$—однородный марковский процесс в R^m.

В работе изучается предельное поведение процесса $\dfrac{X_\varepsilon\left(\frac{T}{\varepsilon}+t\right)}{\sqrt{\varepsilon}}$ при $\varepsilon\to 0$, где $T>0$ фиксировано.

В отличие от ранее рассмотренных случаев (см., напр., [1, 2]) мы будем предполагать, что A—устойчивая матрица.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим матричное уравнение $\dfrac{dX_t^s}{dt}=AX_t^s$ с начальным условием $X_s^s=I$, где I—единичная матрица. Тогда решение уравнения (1) можно записать следующим образом:

$$X_\varepsilon(t)=X_t^0x_0+\int_0^t X_t^s b\left(y\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)ds. \tag{2}$$

Теорема. Пусть для уравнения (1) выполнены следующие условия:

1) матрица A при некоторых $c>0$ и $\alpha>0$ удовлетворяет неравенству $\|e^{At}\|\leqslant e^{-\alpha t}$;

2) $b(y)$—ограниченная и непрерывная функция;

3) процесс $y(t)$ экспоненциально эргодичен с эргодическим распределением $\rho(B)$: при некоторых $k>0$ и $\beta>0$ $|P(y_0, t, B)-\rho(B)|\leqslant ke^{-\beta t}$, где $P(y_0, t, B)$—вероятность перехода для процесса $y(t)$;

4) $\int b(y)\rho(dy)=0$.

Тогда, если $X_\varepsilon(t)$—решение уравнения (1), процесс $\dfrac{X_\varepsilon\left(\frac{T}{\varepsilon}+t\right)}{\sqrt{\varepsilon}}$

сходится по распределениям к однородному гауссовому процессу $\xi(t)$ с независимыми приращениями, для которого $M(\xi(t), z)=0$;

$$M(\xi(t), z)^2 = 2\int_0^\infty\int (X_u^0 \bar{b}(z_1), z)(X_u^0 \bar{b}(z_1), z)\rho(dz_1)du \text{ при } z\in R^n,$$

где

$$\bar{b}(y)=\int b(z)K(y, dz); \quad K(y, B)=\int_0^\infty R(y, s, B)ds;$$

$$R(y, s, B)=P(y, s, B)-\rho(B).$$

Доказательство. Из (2) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}X_\varepsilon\left(\frac{T}{\varepsilon}+t\right)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}X^s{}_{T/\varepsilon+t}\,x_0+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{T/\varepsilon+t} X^s{}_{T/\varepsilon+t}\,b\left(y\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)ds. \quad (3)$$

Первое слагаемое в правой части (3), которое не случайно, стремится к нулю. Действительно, используя условие 1), имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|X^0_{T/\varepsilon+t}\|=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left\|\exp\left\{A\left(\frac{T}{\varepsilon}+t\right)\right\}\right\|\leqslant C\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left\{-\alpha\left(\frac{T}{\varepsilon}+t\right)\right\}.$$

Перейдем теперь к изучению второго слагаемого в правой части (3). Разобьем второе слагаемое на два интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{T/\varepsilon+t} X^s{}_{\frac{T}{\varepsilon}+t}\,b\left(y\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)ds=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{T/\varepsilon-l} X^s{}_{T/\varepsilon+t}\,b\left(y\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)ds+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{T/\varepsilon-l}^{T/\varepsilon+t} X^s{}_{T/\varepsilon+t}\,b\left(y\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)ds, \quad (4)$$

где $l>0$—некоторая постоянная. Обозначим первое слагаемое в (4) через I_1. Используя условия 1), 2), получим

$$\|I_1\|\leqslant\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{T/\varepsilon-l}\exp\left\{-\alpha\left(\frac{T}{\varepsilon}+t-s\right)\right\}ds=L\frac{e^{-\alpha(t+l)}-e^{-\alpha(T/\varepsilon+t)}}{\alpha\sqrt{\varepsilon}}.$$

Отсюда $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ l\to+\infty}}\|I_1\|=0.$

Для второго слагаемого I_2 в (4) имеем

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{T/\varepsilon-l}^{T/\varepsilon+t} X^s{}_{T/\varepsilon+t}\,b\left(y\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)ds=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{-l}^{t} X_t^s d\left(\int_{T/\varepsilon}^{T/\varepsilon+s} b\left(y\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right)du\right).$$

Процесс $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{T/\varepsilon}^{T/\varepsilon+s} b\left(y\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right)du$ стремится по распределениям к однородному гауссовскому процессу $\eta(s)$ с независимыми приращениями (теорема 15, гл. 2 [1]). Отсюда получаем, что I_2 по распределениям сходится к процессу $\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} X_t^s d\eta(s)$.

Вычислим характеристики однородного гауссовского процесса $\xi(t)$ с независимыми приращениями. Из условий 1)—4) имеем

$$M\left(\frac{X_\varepsilon\left(\frac{T}{\varepsilon}+t\right)}{\sqrt{\varepsilon}},\ z\right)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}M\int\limits_0^{T/\varepsilon+t}\left(X^s_{T/\varepsilon+t}\,b\left(y\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right),\ z\right)ds+0(\sqrt{\varepsilon})=$$

$$=\sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^{\frac{T/\varepsilon+t}{\varepsilon}}\int(X^{\varepsilon s}_{T/\varepsilon+t}\,b(v),\ z)P(y,\ s,\ dv)ds+0(\sqrt{\varepsilon})=$$

$$=\sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^{\frac{T/\varepsilon+t}{\varepsilon}}\int(X^{\varepsilon s}_{T/\varepsilon+t}\,b(v),\ z)[P(y,\ s,\ dv)-\rho(dv)]ds+0(\sqrt{\varepsilon})=$$

$$=0(\sqrt{\varepsilon}).$$

Используя условия 1)—4), можем записать

$$M\left(\frac{X_\varepsilon\left(\frac{T}{\varepsilon}+t\right)}{\sqrt{\varepsilon}},\ z\right)^2=\frac{1}{\varepsilon}M\int\limits_0^{T/\varepsilon+t}\int\limits_0^{T/\varepsilon+t}\left(X^u_{T/\varepsilon+t}\,b\left(y\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right),\ z\right)\times$$

$$\times\left(X^s_{T/\varepsilon+t}\,b\left(y\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right),\ z\right)duds+0(\varepsilon)=\frac{2}{\varepsilon}M\int\limits_0^{T/\varepsilon+t}\int\limits_0^{s}\left(X^u_{T/\varepsilon+t}\,b\left(y\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right),\ z\right)\times$$

$$\times\left(X^s_{T/\varepsilon+t}\,b\left(y\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right),\ z\right)duds+0(\varepsilon)=\frac{2}{\varepsilon}\int\limits_0^{T/\varepsilon+t}\int\limits_0^{s}\int\int(X^u_{T/\varepsilon+t}\,b(z_1),\ z)\times$$

$$\times(X^s_{T/\varepsilon+t}\,b(z_2),\ z)R\left(z_1,\ \frac{s-u}{\varepsilon},\ dz_2\right)P\left(y,\ \frac{u}{\varepsilon},\ dz_1\right)duds+0(\varepsilon)=$$

$$=\frac{2}{\varepsilon}\int\limits_0^{T/\varepsilon+t}\int\limits_0^{s}\int\int(X^u_{T/\varepsilon+t}b(z_1),\ z)(X^s_{T/\varepsilon+t}b(z_2),\ z)R\left(z_1,\ \frac{s-u}{\varepsilon},\ dz_2\right)\times$$

$$\times\rho(dz_1)duds+\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon}+0(\varepsilon)=\frac{2}{\varepsilon}\int\limits_0^{T/\varepsilon+t}\int\limits_0^{\delta}\int\int(X^u_{T/\varepsilon+t}\,b(z_1),\ z)\times$$

$$\times(X^{u+v}_{T/\varepsilon+t}b(z_2),\ z)R\left(z_1,\ \frac{v}{\varepsilon},\ dz_2\right)\rho(dz_1)dvdu+O(e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}})+0(\varepsilon)+\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

где δ выбрано так, что $\delta\to0$, $\frac{\delta}{\varepsilon}\to+\infty$ при $\varepsilon\to0$. Далее имеем

$$
M\left(\frac{X_\varepsilon\left(\frac{T}{\varepsilon}+t\right)}{\sqrt{\varepsilon}},\, z\right)^2=\frac{2}{\varepsilon}\int_0^{T/\varepsilon+t}\int_0^{\delta}\iint\left(X^u_{T/\varepsilon+t}b(z_1),\, z\right)\left(X^u_{T/\varepsilon+t}b(z_2),\, z\right)\times
$$

$$
\times R\left(z_1,\, \frac{v}{\varepsilon},\, dz_2\right)\rho(dz_1)dvdu+O\left(\delta e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}}+e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)+\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon}+O(\varepsilon)=
$$

$$
=2\int_0^{T/\varepsilon+t}\iint\left(X^u_{T/\varepsilon+t}b(z_1),\, z\right)\left(X^u_{T/\varepsilon+t}\bar{b}(z_1),\, z\right)\rho(dz_1)du+O\left(\delta e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}}+\right.
$$

$$
\left.+e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)+\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon}+O(\varepsilon)=2\int_0^{\infty}\iint\left(X^0_w b(z_1),\, z\right)\left(X^0_w \bar{b}(z_1),\, z\right)\rho(dz_1)dw+
$$

$$
+\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon}.
$$

Теорема доказана.

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики

Поступила 7.07.1987

ЛИТЕРАТУРА

1. **Скороход А. В.** Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1987.
2. **Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.** Флуктуации в динамических дифференциальных системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.

Ամփոփում

Հոդվածում ապացուցված է սահմանային թեորեմ պատահական պրոցեսների համար, որոնք որոշվում են համասեռ մարկովյան պրոցեսի ազդեցության տակ գտնվող դինամիկ համակարգի միջոցով։

SUMMARY

In the article a limit theorem is proved for random processes determined by the dynamic system under the influence of homogeneous Markov process.