ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1988 Естественные науки

Математика

УДК 517.518

Г. В. БАДАЛЯН, В. М. ЕДИГАРЯН

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОЛУЧЕНИЯ АНАЛОГА НЕРАВЕНСТВА В. А. МАРКОВА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ В МЕТРИКЕ $L^p(0, 1)$, $1<p<\infty$

Для любого полинома $P_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющего условию $\|P_n\|L^p(0, 1)\leqslant M_{n,p}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, предлагается новый метод оценки $|P_n^{(s)}(x)|$ в любой точке $x\in[0, 1]$, $0\leqslant s\leqslant n$. Доказывается неухудшаемость точности оценки по сравнению с другими методами.

Хорошо известен результат В. А. Маркова:

Теорема. А. **Если полином $P(x)$ степени не выше n на сегменте** $[a, b]$ удовлетворяет неравенству $|P(x)|\leqslant M$, то на том же сегменте

$$|P^{(m)}(x)|\leqslant\frac{2^m M}{(b-a)^m}\frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(m-1)^2]}{(2m-1)!!},\quad 0<m<n \tag{1}$$

(см. [1], с. 179).

Началом большого цикла работ послужило неравенство С. М. Никольского [2], известное как «неравенство разных метрик»; оно, в частности, для тригонометрических полиномов $T_n(x)$ имеет вид

$$\|T_n\|_{L^q(-\pi,\pi)}\leqslant 2n^{1/p-1/q}\|T_n\|_{L^p(-\pi,\pi)}\quad 1\leqslant p<q\leqslant\infty. \tag{2}$$

Точные в смысле порядка оценки для

$$M^{q,\rho}_{p,\sigma}(n, k)=\sup_{\substack{Q\in P_n\\ Q\neq 0}}\frac{\|Q^{(k)}\|_{q,\rho}}{\|Q\|_{p,\sigma}},$$

где P_n—множество всех многочленов степени не выше n,

$$\|f\|_{p,\sigma}=\begin{cases}\left(\int\limits_{-1}^{1}|f(x)(1-x^2)^{\sigma}|^p dx\right)^{1/p}, & 0<p<\infty,\\ \operatorname{esssup}|f(x)|(1-x^2)^{\sigma}, & p=\infty,\ x\in[-1, +1],\end{cases}$$

σ и p—действительные числа, притом $p\sigma>-1$, когда $0<p<\infty$, и $\sigma\geqslant 0$, когда $p=\infty$, получены в работе [3].

До появления этой работы были получены аналогичные результаты разной степени точности. Достаточно полное сведение о них приведено в [3].

В настоящей работе ставится целью предложить наиболее простой метод для решения такого типа задачи без существенного ухудшения точности результатов.

Решаемая в работе задача ставится так.

Для любого полинома $P_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющего условию

$$\|P_n\|_{L^p(0,\ 1)} \leqslant M_{n,\ p},\ 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{3}$$

требуется оценить $|P_n^{(s)}(x)|$ в любой точке $x \in [0,\ 1]$, $0 \leqslant s \leqslant n$.

При решении использован частный случай доказанной в [4] теоремы 1.1.

Для удобства чтения ниже приводим формулировку этой теоремы в более полной форме.

Рассмотрим последовательность

$$-\frac{1}{2} < \gamma_0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \tag{4}$$

и квазимногочлен

$$\hat{X}_{n,s}(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{2\pi i} \int\limits_C \prod_{\nu=0}^{n} \frac{-\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{-\zeta+\gamma'_s},\quad \gamma'_\nu = \gamma_\nu + 1, \tag{5}$$

где $0 \leqslant s \leqslant n$, контур C здесь и впредь в аналогичных случаях охватывает окрестности $0,\ -\gamma_1,\ -\gamma_2,\ \ldots,\ -\gamma_n$.

Теорема. Б. **Для определенных в (5) квазимногочленов** $\hat{X}_{n,s}(x)$ справедливы утверждения

$$J_{n,s,k} = \int\limits_0^1 \hat{X}_{n,s}(x)\, x^{\gamma_k} dx = \begin{cases} 0 & k \neq s \\ \prod\limits_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq s}}^{n} \dfrac{-\gamma_s+\gamma'_\nu}{\gamma'_s+\gamma_\nu} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\gamma_s+1}}, & 0 \leqslant s,\ k \leqslant n. \end{cases} \tag{6}$$

Действительно. Из представления (5) следует, что

$$\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^p(0,1)} \leqslant C_{n,s,p} < \infty,\ \forall p[1,\ \infty).$$

Это значит, что при $\gamma_k > \mathrm{Re}\,\zeta$

$$\begin{aligned} J_{n,s,k} = \int\limits_0^1 \hat{X}_{n,s}(x)\, x^{\gamma_k} dx &= \frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{2\pi i} \int\limits_C \prod_{\nu=0}^{n} \frac{-\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} \frac{\int\limits_0^1 x^{\gamma'_k-\zeta-1} d\zeta}{-\zeta+\gamma'_s} = \\ &= \frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{2\pi i} \int\limits_C \prod_{\nu=0}^{n} \frac{-\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} \frac{d\zeta}{(\gamma'_k-\zeta)(-\zeta+\gamma'_s)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, что при $k \neq s$ последняя величина обращается в нуль, а при $k = s$ после предварительного сокращения получаем

$$J_{n,s,s} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{2\pi i} \int\limits_C \prod_{\nu=0}^{n} \frac{-\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} \frac{d\zeta}{(-\zeta+\gamma'_s)(-\zeta+\gamma'_s)} = \operatorname*{Res}_{\zeta=\gamma'_s} \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq s}}^{n} \frac{-\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} \frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{\zeta+\gamma_s} =$$

$$= \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n} \frac{-\gamma_s+\gamma_\nu}{\gamma_s'+\gamma_\nu} \cdot \frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{\gamma_s'+\gamma_s}.$$

Значит $J_{n,k,s}=0$ при $k\neq s$, а

$$J_{n,s,s}=\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n} \frac{-\gamma_s+\gamma_\nu}{\gamma_s'+\gamma_\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\gamma_s+1}}. \tag{8}$$

Теорема Б доказана.

Нам понадобится частный случай функции $\hat{X}_{n,s}(x)$, когда $\gamma_\nu=\nu$, $\nu=0, 1, 2, \ldots, n$. По-прежнему, сохранив обозначение $\hat{X}_{n,s}(x)$, будем считать, что $\gamma_\nu=\nu$, $\nu=0, 1, \ldots, n$.

Сформулируем теперь основную теорему настоящей работы.

Теорема 1. **Для всякого многочлена**

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

удовлетворяющего условию (3), справедливы неравенства

$$|P_n^{(s)}(x)|\leqslant l_x^{-s-\frac{1}{p}}|J_{n,s,s}|^{-1}s!\, M_{n,p} \,\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(0,1)}, \tag{9}$$

где

$$x\in[0, 1],\ 0\leqslant s\leqslant n,\ 1\leqslant p\leqslant\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

$J_{n,s,s}$ определено в (6);

$$l_x=1-x, \text{ если } x\in\left[0, \frac{1}{2}\right], \text{ и } l_x=x, \text{ если } x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right], \ \|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(0,1)} \tag{10}$$

определено при $\gamma_\nu=\nu$, $\nu=0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Разложим $P_n(x)$ по формуле Тейлора в окрестности произвольной точки $x_0\in[0, 1]$. Тогда многочлен $P_n(x)$ представится в виде

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k(x_0)(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{11}$$

Разберем два случая: 1) $0\leqslant x_0\leqslant\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}\leqslant x_0\leqslant 1$.

Так как $b_k(x_0)$ в представлении (11) не зависит от $x>x_0$ или $x<x_0$, то нам будет удобно соответственно в первом случае положить $x_0<x<1$, а во втором — $0<x<x_0$.

Начнем с первого случая.

Произведем в (11) замену переменной $x=x_0+\tau(1-x_0)$, тогда

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k(x_0)(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n} b_k(x_0)(1-x_0)^k\tau^k=P_n[x_0+\tau(1-x_0)], \tag{12}$$

где $\tau\in[0, 1]$, если $x\in[x_0, 1]$.

Рассмотрим

$$Y_{n,s}(x_0) \equiv \int_{x_0}^{1} P_n(x)\hat{X}_{n,s}\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)\frac{dx}{1-x_0} = \int_0^1 P_n[x_0+\tau(1-x_0)]\hat{X}_{n,s}(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} b_k(x_0)(1-x_0)^k \tau^k \hat{X}_{n,s}(\tau)d\tau. \qquad (12')$$

Откуда согласно теореме Б будем иметь

$$Y_{n,s}(x_0) = b_s(x_0)(1-x_0)^s \int_0^1 \tau^s \hat{X}_{n,s}(\tau)d\tau = b_s(x_0)(1-x_0)^s J_{n,s,s}. \qquad (12'')$$

Из (12′) и (12″) в силу (10) следует, что

$$b_s(x_0) = \frac{1}{(1-x_0)^s J_{n,s,s}} \int_0^1 P_n[x_0+\tau(1-x_0)]\hat{X}_{n,s}(\tau)d\tau. \qquad (13)$$

Из (13) после применения преобразования Гельдера получаем

$$|b_s(x_0)| \leqslant \frac{1}{(1-x_0)^s J_{r,s,s}} \left(\int_0^1 |P_n[x_0+\tau(1-x_0)]|^p d\tau\right)^{1/p} \| \hat{X}_{n,s} \|_{L^q(0,1)}. \qquad (13')$$

Но

$$\left(\int_0^1 |P_n[x_0+\tau(1-x_0)]|^p d\tau\right)^{1/p} = \left(\int_{x_0}^1 |P_n(x)|^p \frac{dx}{1-x_0}\right)^{1/p} = \frac{M_{n,p}}{(1-x_0)^{1/p}},$$

поэтому неравенство (13′) перепишется в виде

$$|b_s(x_0)| \leqslant \frac{|J_{n,s,s}^{-1}|}{(1-x_0)^{s+1/p}} M_{n,p} \| \hat{X}_{n,s} \|_{L^q(0,1)}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \qquad (13'')$$

Разберем теперь второй случай $\left(\frac{1}{2} \leqslant x_0 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0\right)$. В (11) на этот раз введем замену

$$\frac{x-x_0}{x_0} = -\tau, \quad \tau > 0, \ (x = x_0(1-\tau)).$$

Очевидно, что при $x \uparrow [0, x_0]$ $\tau \downarrow [0, 1]$, поэтому будем иметь

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x_0)(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} b_k(x_0) x_0^k (-\tau)^k. \qquad (14)$$

Составим

$$Y^*_{n,s}(x_0) = \int^{x_0} P_n(x)\hat{X}_{n,s}\left(\frac{x_0-x}{x_0}\right)\frac{dx}{x_0} = \int_0^1 P_n(x_0(1-\tau))\hat{X}_{n,s}(\tau)d\tau =$$

$$=b_s(x_0)x_0^s(-1)^s\int_0^1 \tau^s \hat{X}_{n,s}(\tau)d\tau=b_s(x_0)(-1)^s x_0^s J_{n,s,s}. \qquad (14')$$

Из (14′) далее получаем

$$|b_s(x_0)|\leqslant x_0^{-s}J_{n,s,s}^{-1}\left(\int_0^1 |P_n(x_0(1-\tau))|^p d\tau\right)^{1/p}\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(0,1)}. \qquad (14'')$$

Но

$$\left(\int_0^1 |P_n(x_0(1-\tau))|^p d\tau\right)^{1/p}=\left(\int_0^1 |P_n(x)|^p \frac{dx}{x_0}\right)^{1/p}\leqslant\frac{M_{n,p}}{x_0^{1/p}},$$

поэтому на этот раз получаем

$$|b_s(x_0)|\leqslant x_0^{-s-1/p}J_{n,s,s}^{-1}M_{n,p}\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(0,1)}. \qquad (14''')$$

Из (13″) и (14‴) с учетом того, что

$$P_n^{(s)}(x_0)=b_s(x_0)\cdot s!,$$

получаем неравенство (9) (где x_0 заменено на x).

Теорема 1 доказана.

Замечание. Следует отметить, что

$$|J_{n,s,s}^{-1}|\cdot s!=\frac{(n+1)\prod_{\nu=1}^{n}[(n+1)^2-\nu^2]}{s!\sqrt{2s+1}}. \qquad (15)$$

Действительно, согласно (8) при $\gamma_\nu=\nu$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$

$$J_{n,s,s}^{-1}=\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n}\frac{s'+\nu}{|s-\nu|}\sqrt{2s+1}=\frac{\prod_{\nu=0}^{n}(s+\nu')}{s!(n-s)!}\,\frac{\sqrt{2s+1}}{s+s'}=\frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n+1)}{s!(n-s)!\sqrt{2s+1}}=$$

$$=\frac{(n+1+s)!}{(s!)^2(n-s)!\sqrt{2s+1}}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+1+s)\cdot n!}{(s!)^2(n-s)!\sqrt{2s+1}}.$$

Но

$$\frac{n!}{(n-s)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n+1-s)\cdot(n-s)!}{(n-s)!},$$

поэтому

$$|J_{n,s,s}^{-1}|=\frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-2^2]\ldots[(n+1)^2-s^2]}{(s!)^2\sqrt{2s+1}}. \qquad (15')$$

Сформулируем теорему 1 в терминах равенства (15′).

Теорема 1′. Для всякого многочлена $P_n(x)$, удовлетворяющего условию (3), справедливы неравенства

$$|(P_n^{(s)}(x)| \leqslant l_x^{-s-1/p} \frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-2^2]\ldots[(n+1)^2-s^2]}{s!\sqrt{2s+1}} \times$$

$$\times M_{n,p} \| \hat{X}_{n,s} \|_{L^q(01)}, \qquad (9')$$

где $x \in [0, 1]$, l_x, $M_{n,p}$, $\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(01)}$ определены, как в теореме 1.

Пример функции $\hat{X}_{n,s}(x)$, когда $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2\ldots$ показывает, что

$$\hat{X}_{n,s}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_s x^s + \ldots + a_n x^n,$$

где

$$|a_s| = \frac{|\hat{X}_{n,s}^{(s)}(0)|}{s!} = \left| \operatorname*{Res}_{\zeta=-s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\zeta-(s+1)} \frac{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta-\nu-1)}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)} \right|.$$

Значит

$$|\hat{X}_{n,s}^{(s)}(0)| = \frac{s! \prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu+1)}{s!(n-s)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2s+1}}.$$

Поэтому согласно (15′)

$$|\hat{X}_{n,s}^{(s)}(0)| = \frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-2^2]\ldots[(n+1)^2-s^2]}{s!\sqrt{2s+1}}.$$

Это значит, что существует многочлен $P_n(x) \equiv \hat{X}_{n,s}(x)$, удовлетворяющий условию $\|P_n\|_{L^2(0,1)} = 1$, такой, что

$$|P_n^{(s)}(0)| = \frac{(n+1)[(n+1)^2-1]\ldots[(n+1)^2-s^2]}{s!\sqrt{2s+1}} \| \hat{X}_{n,s} \|_{L^2(0,1)},$$

при этом

$$\| \hat{X}_{n,s} \|_{L^2(01)} \equiv \| P_n \|_{L^2(0,1)} = 1.$$

Приведенный пример показывает, что в теореме 1′ оценка (9′) достаточно точная (там, может быть, является лишним только множитель $0 < l_x^{-s-1/p} \leqslant 2^{s+1/p}$).

Для придания теоремам 1 и 1′ более завершенного вида нам следует оценить возможно точнее $\| \hat{X}_{n,s} \|_{L^q(0,1)}$.

Как нетрудно заметить, точная оценка для $\| \hat{X}_{n,s} \|_{L^q(0,1)}$ получается лишь при $q=2$ (см. [3]), а для остальных случаев $q \in [1, \infty]$ по лучаются только неравенства, ограничивающие $\| \hat{X}_{n,s} \|_{L^q(01)}$ сверху.

Для согласованности изложения мы здесь приведем оценку $\|\hat{X}_{n,s}\|$ прямым путем. Для этого понадобится следующая теорема.

Если $f \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, то правая часть в

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy \tag{16}$$

сходится в $L^q = L^{\frac{p}{p-1}}$ в функции $\hat{f} \in L^q$.

Функция $\hat{f}$ удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^q dx \right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \tag{17}$$

равенствам

$$\hat{f}(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{e^{-ixy}}{-iy} dy \right\}$$

и

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \frac{e^{ixy} - 1}{iy} dy \right\}$$

для почти всех x и

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy,$$

где правая часть сходится в L^p (см. [5], т. II, с. 381).

Заметим теперь, что если в этой теореме за исходное преобразование брать не (16), а

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{-iyx} dy, \tag{16'}$$

то, естественно, поменяются местами f и $\hat{f}$ в других соотношениях. В частности (17) заменится на

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^q dx \right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{17'}$$

Положим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\sigma+i\tau)e^{(\sigma+i\tau)x}d\tau,$$

тогда

$$f(x)e^{-\sigma x}=\hat{F}(x),\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\sigma+i\tau)}{\sqrt{2\pi}}e^{i\tau x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{F}(\tau)l^{ix\tau}d\tau,$$

где

$$\hat{F}(\tau)=\frac{G(\sigma+i\tau)}{\sqrt{2\pi}},\quad \tau>0,$$

а $G(\zeta)$ у нас будет конкретная аналитическая в $\operatorname{Re}\zeta>0$ функция и при $\sigma>0$, $G(\sigma+i\tau)\in L^p(-\infty,+\infty)$.

Это значит, что неравенство (17′) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^q dx\right)^{1/q}\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{F}(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p}$$

или

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)l^{-\sigma x}|^q dx\right)^{1/q}\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{G(\sigma+i\tau)}{\sqrt{2\pi}}\right|^p d\tau\right)^{1/p}. \qquad (17'')$$

Перейдем теперь к оценке $\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(0,1)}$, когда $2\leqslant q<\infty$ $(1<p\leqslant 2)$. Имеем

$$\hat{X}_{n,s}(x)=\frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{Q_n(\zeta)}{\gamma_s'-\zeta}x^{-\zeta}d\zeta=\frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{Q_n(\zeta)}{\gamma_s'-\zeta}e^{\zeta t}d\zeta=$$

$$=\hat{X}_{n,s}(e^{-t}), \qquad (18)$$

где $x=e^{-t}$, $t\in(0,\infty)$, так как $\hat{X}_{n,s}(e^{t})=0$, когда $t\leqslant 0$,

$$Q_n(\zeta)=\prod_{\nu=0}^{n}\frac{\zeta-\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}. \qquad (19)$$

Из (18), где $\zeta=\sigma+i\tau$, следует, что

$$\hat{X}_{n,s}(e^{-t})e^{-\sigma t}=\frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_n(\sigma+i\tau)}{\gamma_s'-\zeta}e^{i\tau t}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\sigma+i\tau)}{\sqrt{2\pi}}e^{i\tau t}d\tau,$$

где

$$G(\sigma+i\tau)=\sqrt{2\gamma_s+1}\,Q_n(\sigma+i\tau):(\gamma_s'-\sigma-i\tau). \qquad (19')$$

Возвращаясь к (17″), будем иметь

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty|\hat{X}_{n,s}(e^{-t})|^q e^{-\sigma tq}dt\right)^{1/q}\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{G(\sigma+i\tau)}{\sqrt{2\pi}}\right|^q d\tau\right)^{1/q}, \qquad (17''')$$

где $1<p\leqslant 2$, $q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Примем $\sigma=\frac{1}{q}$, тогда из (17‴) получим

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty|\hat{X}_{n,s}(e^{-t})|^q\,d(-e^{-t})\right)^{1/q}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1|\hat{X}_{n,s}(x)|^q dx\right)^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{G\left(\frac{1}{q}+i\tau\right)}{\sqrt{2\pi}}\right|^p d\tau\right)^{1/p}. \qquad (17^{IV})$$

Но

$$\frac{G\left(\frac{1}{q}+i\tau\right)}{\sqrt{2\pi}}=\frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{Q_n\left(\frac{1}{q}+i\tau\right)}{-\frac{1}{q}-i\tau+\gamma_s'},$$

поэтому

$$\left|\frac{G\left(\frac{1}{q}+i\tau\right)}{\sqrt{2\pi}}\right|=\frac{\sqrt{2\gamma_s+1}}{\sqrt{2\pi}}\prod_{\nu=0}^{n}\left(\frac{\left(\gamma_\nu'-\frac{1}{q}\right)^2+\tau^2}{\left(\gamma_\nu+\frac{1}{q}\right)^2+\tau^2}\right)^{1/2}\frac{1}{\left(\left(\gamma_s'-\frac{1}{q}\right)^2+\tau^2\right)^{1/2}},$$

и так как $1<p\leqslant 2$, а $0<q=\frac{p}{p-1}>p$, $\gamma_\nu'-\frac{1}{q}=\gamma_\nu+1-\frac{1}{q}=\gamma_\nu+\frac{1}{p}>$ $>\gamma_\nu+\frac{1}{q}$, будем иметь

$$\left|\frac{G\left(\frac{1}{q}+i\tau\right)}{\sqrt{2\pi}}\right|<C\sqrt{2\gamma_s+1}\,\frac{\prod_{\nu=0}^{n}\frac{\gamma_\nu+\frac{1}{p}}{\gamma_\nu+\frac{1}{q}}}{\left(\left(\gamma_s+\frac{1}{p}\right)^2+\tau^2\right)^{1/2}}.$$

По этой причине из (17^{IV}) получим

$$\left(\int_0^1 |\hat{X}_{n,s}(x)|^q dx\right)^{1/q} < C_1 \sqrt{2\gamma_s + 1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\left(\left(\gamma_s + \frac{1}{p}\right)^2 + \tau^2\right)^{q/2}}\right)^{1/q} \prod_{\nu=0}^{n} \cdot \frac{\gamma_\nu + \frac{1}{p}}{\gamma_\nu + \frac{1}{q}}.$$

Легко заметить, что

$$\left(\int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\left(\left(\gamma_s + \frac{1}{p}\right)^2 + \tau^2\right)^{q/2}}\right)^{1/q} < \frac{C'}{\left(\gamma_s + \frac{1}{p}\right)^{1-\frac{1}{q}}} = \frac{C'}{\left(\gamma_s + \frac{1}{p}\right)^{q}}.$$

Поэтому при $1<p<2$, $2<q<\infty \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ имеем

$$\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(0,1)} < C_0 \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu + \frac{1}{p}}{\gamma_\nu + \frac{1}{q}}, \tag{20}$$

где C_0 не зависит от s и n.

Перейдем теперь к оценке $\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(0,1)}$, когда $1<q<2$.

При $q=2$ сразу имеем $\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(0,1)} = 1$, поэтому нам следует разобрать случай, когда $1<q<2$.

Здесь дело обстоит намного проще. Достаточно заметить, что при $1<q<2$

$$\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(0,1)} < \|\hat{X}_{n,s}\|_{L^2(0,1)}, \tag{21}$$

в чем легко убедимся, применив к интегралу

$$\int_0^1 |\hat{X}_{n,s}(x)|^q dx$$

неравенство Гельдера, полагая $p'>1$, $qq'=2$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$.

Будем иметь

$$\int_0^1 |\hat{X}_{n,s}(x)|^q dx \leqslant \left(\int_0^1 |\hat{X}_{n,s}(x)|^{qq'} dx\right)^{1/q'} \left(\int_0^1 dx\right)^{1/p},$$

откуда, зная, что $qq'=2$, получаем

$$\|\hat{X}_{n,s}\|_{L^q(0,1)} \leqslant \left(\int_0^1 |\hat{X}_{n,s}(x)|^2 dx\right)^{1/qq'} = \|\hat{X}_{n,s}\|_{L^2(0,1)} = 1. \tag{22}$$

Объединив оценки (20) и (22), получаем

$$B_{n,s,q} \equiv \| \hat{X}_{n,s} \|_{L^q(0,1)} < \begin{cases} C \prod\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{\gamma_\nu + \frac{1}{p}}{\gamma_\nu + \frac{1}{q}}, & 2 \leqslant q < \infty, \ p = \dfrac{q}{q-1}, \\ 1 & , 1 < q \leqslant 2, \end{cases} \tag{23}$$

где постоянная C не зависит от n и s.

Теперь заметим, что для интересующего нас случая $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, имеем

$$C \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\nu + \frac{1}{p}}{\nu + \frac{1}{q}} < C' \exp\left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right] = C_0 n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}},$$

и для $B_{n,s,q}$ в этом случае получим

$$B_{n,s,q} = \| \hat{X}_{n,s} \|_{L^q(0,1)} < \begin{cases} C_0 n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, & 2 \leqslant q < \infty, \ p = \dfrac{q}{q-1}, \\ 1 & , \quad 1 < q \leqslant 2. \end{cases} \tag{23'}$$

Теперь мы можем теорему 1′ сформулировать в виде

Теорема 1″. **Для всякого удовлетворяющего условию (3) многочлена $P_n(x)$ степени не выше n и $x \in [0, 1]$ справедливы неравенства**

$$|P_n^{(s)}(x)| \leqslant l_x^{-s-\frac{1}{p}} \frac{(n+1) \prod\limits_{\nu=1}^{n} |(n+1)^2 - \nu^2|}{s! \sqrt{2s+1}} B_{n,s,q} M_{n,p}, \tag{24}$$

где $M_{n,p} = \|P_n\|_{L^p(0,1)}$, $1 < p < \infty$, $B_{n,s,q}$, оценивается по (23′), $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а

$$l_x = \begin{cases} 1 - x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

ЕГУ, ЕрПИ

Поступила 16.02.1988

ЛИТЕРАТУРА

1. **Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.: Гос. изд. тех. лит., 1949.**
2. **Никольский С. М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных.—Тр. мат. ин-та им. Стеклова, 1951, т. 39, с. 244—278.

3. **Конягин С. В.** Оценки производных от многочленов.— ДАН СССР, 1978, т. 243, № 5, с. 1116—1118.

4. **Бадалян Г. В. Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения.—** ИАН Арм. ССР, сер. физ-мат. и тех. н., 1955, т. 8, № 5.

5. **Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. II. Мир, 1965.**

Ամփոփում

Աշխատանքում ցանկացած $P_n(x)$ *բազմանդամի համար, որի աստիճանը չի գերազանցում* n*-ը և որը բավարարում է* $\|P_n\|_{L^p(0,1)} \leq M_{n,p}$, $1 \leq p < \infty$, *անհավասարությանը, բերվում է ցանկացած* $x \in [0, 1]$ *կետում և* $0 \leq s \leq n$ *համար* $|P_n^{(s)}(x)|$*-ի գնահատման նոր եղանակ։*

Ապացուցվում է, որ ստացված գնահատականի ճշգրտությունը նախորդ արդյունքների համեմատությամբ էապես չի փոխվում։

SUMMARY

For any polynomial $P_n(x)$ of degree n a new method of estimation of $/P_n^{(s)}(x)/$ in arbitrary point $x \in [0,1]$, $0 \leq s \leq n$ has been presented. It has been proved that the obtained estimates are not less exact compared with other methods.