ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1984 Естественные науки

## *Математика*

УДК 513.6

С. Г. ДАЛАЛЯН

# О МНОГООБРАЗИИ ПРИМА РАЗВЕТВЛЕННОГО ДВУЛИСТОГО НАКРЫТИЯ ТРИГОНАЛЬНОЙ КРИВОЙ

По двулистному накрытию $\pi: \tilde{C} \to C$ и трехлистному накрытию $t: C \to X$ полных неособых кривых строятся четырехлистное накрытие $q: Y \to X$ и двулистное накрытие $p: \tilde{Y} \to Y$ так, что многообразия Прима двулистных накрытий связаны парой гомоморфизмов, индуцирующих взаимно обратные изоморфизмы при $X = P_1$ и некотором ограничительном условии на ветвления.

Рассматривается категория полных неособых алгебраических кривых и их конечнолистных накрытий над алгебраически замкнутым основным полем, характеристика которого не равна двум и трем. В этой категории существуют расслоенные произведения и фактор-объекты по действию конечных групп автоморфизмов.

1. Пусть $\pi: \tilde{C} \to C$—двулистное накрытие, $t: C \to X$—нормальное трехлистное накрытие с циклической группой Галуа $G_t$. Образуем тройное расслоенное произведение $\check{X} \to C$ семейства морфизмов $\pi_a = a \cdot \pi$, $a \in G_t$. Оно разлагается в композиции проекций $\check{X} \xrightarrow{q_a} \tilde{C} \xrightarrow{\pi_a} C$, $a \in G_t$ и является накрытием Галуа с абелевой группой Галуа, порожденной тремя инволюциями. Кроме того, на $\check{C}$ действует автоморфизм $j$ третьего порядка, перестановочный со сквозным морфизмом $\varkappa = t \cdot \pi \cdot q$. Нетрудно заметить, что группа, порожденная указанными четырьмя автоморфизмами, изоморфна подгруппе $G$ симметрической группы $S_6$, порожденной транспозициями (12), (34), (56) и подстановкой $j = (135)(246)$. Порядок группы $G$ равен 24, т. е. степени сквозного накрытия $\varkappa$, поэтому $\varkappa$ является накрытием Галуа с группой $G_\varkappa \cong G$.

Профакторизовав кривую $\check{X}$ по действию автоморфизма $j$ и перестановочной с ним инволюции группы $G_\varkappa$, получим башню (1), где $q$, $\tilde{q}$, $\check{q}$—четырехлистные, $f$, $\tilde{t}$, $\check{t}$—трехлистные и $\pi$, $\tilde{\tau}$, $p$—двулистные накрытия.

Если накрытие $t: C \to X$ не нормально, то, предварительно нормализуя его, получим шестилистное накрытие Галуа $C_0 \xrightarrow{\check{t}} C \xrightarrow{t} X$ с группой Галуа, изоморфной $S_3$. Построим композицию морфизмов $C_0 \xrightarrow{t_0} X_0 \xrightarrow{\tau} X$, определенную факторизацией кривой $C_0$ по действию знакопеременной подгруппы $A_3<S_3$. Рассмотрим расслоенное произведение $\tilde{C}_0=\tilde{C}\times_C C_0$ и проекцию $\pi_0:\tilde{C}_0\to C_0$. Теперь предыдущая конструкция применима к двулистному накрытию $\pi_0$ и трехлистному накрытию $t_0$. В результате получится башня (2), где сквозное накрытие $\varkappa:\check{X}\to X$ является накрытием Галуа, группа Галуа которого изоморфна подгруппе G симметрической группы $S_6$, порожденной элементами $i_l=(2l-1\ 2l)$ ($l=1,$

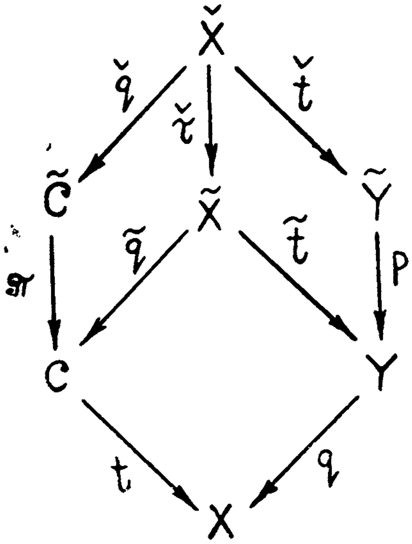

Рис. 1. Башня (1).

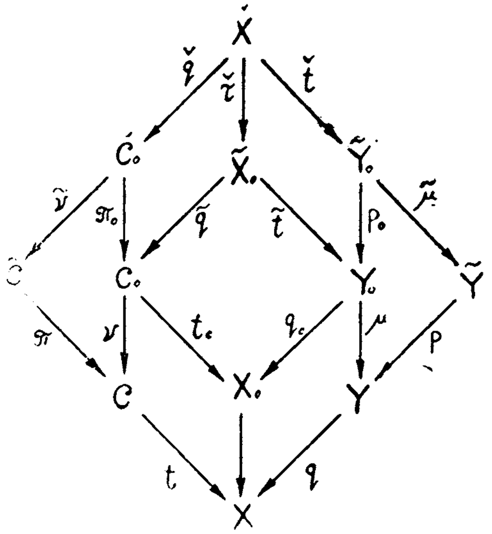

Рис. 2. Башня (2).

$2, 3$), $i=(34)(56)$ и $j=(135)(246)$. Кривая $\check{Y}$ (соответственно Y) и накрытие $\tilde{\mu}$ (соотв. $p\cdot\tilde{\mu}$) получаются факторизацией $\check{X}$ по действию группы $G_{\tilde{Y}}$, порожденной элементами i и j (соотв. $G_Y$, порожденной элементами i, j и $i_1, i_2, i_3$). Отметим, что накрытия $q$, $q_0$, $\tilde{q}$, $\check{q}$ четырехлистны, $t, t_0$, $\check{t}$, $\tilde{t}$ трехлистны, остальные двулистны.

2. Пусть G—конечная группа автоморфизмов кривой $\check{X}$, $\varkappa:\check{X}\to X$—соответствующее ей накрытие. Если $N<H<G$—подгруппы, то факторизацией $\check{X}$ по их действию морфизм $\varkappa$ можно разложить в композицию $\check{X}\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\beta}Z\xrightarrow{\gamma}X$, где $\alpha$, $\beta\cdot\alpha$—накрытия Галуа с группами соответственно N и H. Вычислим ветвления накрытия $\beta$.

Полный прообраз точки P кривой X относительно $\varkappa$ представляет из себя орбиту $G\check{P}$ произвольной точки $\check{P}$ этого прообраза. Если $G_0$—группа изотропии точки $\check{P}$, то орбита $G\check{P}$ биективна фактор-множеству правых смежных классов $G/G_0$, а ее образы $\alpha(G\check{P})$ и $\beta\cdot\alpha(G\check{P})$ изоморфны соответственно двойным фактор-множествам

$$N\backslash G/G_0=\{NgG_0 \mid g\in G\} \text{ и } H\backslash G/G_0=\{HgG_0 \mid g\in G\}.$$

Группой изотропии точки $g\check{P}$ накрытия Галуа $\varkappa$ является подгруппа $G_0^g = gG_0g^{-1}$ группы $G$ (которая совпадает с $G_0$ тогда и только тогда, когда $g \in Nor_G G_0$), причем каждая сопряженная к $G_0$ подгруппа группы $G$ выступает как изотропная группа некоторой точки полного прообраза точки $P$. Индекс ветвления $i_\varkappa(\check{P}_g)$ точки $\check{P}_g = g\check{P}$ накрытия Галуа $\varkappa$ равен порядку ее группы изотропии

$$i_\varkappa(\check{P}_g) = |G_0^g| = |G_0|.$$

Относительно накрытий Галуа $\alpha$ и $\beta \cdot \alpha$ группами изотропии точки $\check{P}_g$ будут соответственно подгруппы $G_0^g \cap N$ и $G_0^g \cap H$, и, следовательно, соответствующие индексы ветвления вычисляются по формулам

$$i_\alpha(\check{P}_g) = |G_0^g \cap N|, \qquad i_{\beta \cdot \alpha}(\check{P}_g) = |G_0^g \cap H|.$$

Индекс ветвления обладает свойством мультипликативности относительно композиции отображений

$$i_{\beta \cdot \alpha}(\check{P}_g) = i_\alpha(\check{P}_g) \cdot i_\beta(\alpha(\check{P}_g)).$$

Отсюда для вычисления индекса ветвления в произвольной точке $Q = \alpha(\check{P}_g)$ кривой $Y$ получаем формулу

$$i_\beta(Q) = \frac{|G_0^g \cap H|}{|G_0^g \cap N|}.$$

Используя известное соотношение для мощности двойного класса смежности

$$|AcB| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B^c|},$$

получаем другой, более полезный, вид формулы для вычисления индекса ветвления

$$i_\beta(Q) = \frac{|NgG_0|}{|HgG_0|} \cdot (H:N).$$

3. Применим полученные формулы для вычисления ветвлений накрытий кривых башен (1) и (2). Эти башни строились, исходя из накрытий $\pi$ и $t$. Поэтому точки ветвления и индексы ветвления всех накрытий этих башен определяются аналогичными характеристиками исходных накрытий. Отдельно надо рассмотреть все возможные случаи расположения ветвлений накрытий $\pi$ и $t$. Через $P$ будем обозначать точку кривой $X$, через $\check{P}$—произвольный его прообраз на кривой $\check{X}$ и через $G_0$—группу изотропии точки $\check{P}$.

A) Рассмотрим случай $t^*(P) = P_1 + P_2 + P_3$, $P_i \neq P_j (i \neq j)$.

Aa) Если $\pi$ не разветвлено над точками $P_i$, то группа $G_0$ тривиальна и все накрытия башен неразветвлены над точкой $P$.

Ав) Если $\pi$ разветвлено над одной из точек $P_i$, то группа $G_0$ изоморфна $< i_1 >$ и $q$ над $P$ имеет две точки ветвления индекса 2, над которыми $p$ не разветвлено.

Ac) Если $\pi$ разветвлено над двумя из точек $P_1$, то $G_0$ изоморфно $\langle i_1 i_2 \rangle$ и опять q над P имеет две точки ветвления, над которыми p не разветвлено.

Ad) Если $\pi$ разветвлено над всеми тремя точками $P_1$, то $G_0$ изоморфна группе $\langle i_1 i_2 i_3 \rangle$, порожденной элементом $i_1 i_2 i_3$, и q над P имеет четыре простых прообраза, над каждым из которых p разветвлено.

B) Пусть $t^*(P) = 2P_1 + P_2$. (Это возможно только в случае башни (2)).

Ba) Если $\pi$ не разветвлено над обеими точками $P_1$, то $G_0$ порождается элементом i и q над P имеет единственное ветвление индекса 2, а p не разветвлено над всеми тремя прообразами P.

Bв) Если $\pi$ разветвлено над $P_2$ и не разветвлено над $P_1$, то $G_0 \cong \langle i_1 i \rangle$ и q над P имеет одно ветвление индекса 2, а p разветвлено над простыми прообразами точки P.

Bc) Если $\pi$ разветвлено над $P_1$ и не разветвлено над $P_2$, то $G_0$ сопряжено с $\langle i_2 i \rangle$ и q над P имеет точку ветвления индекса 4, над которой p не разветвлено.

Bd) Если $\pi$ разветвлено и над $P_1$, и над $P_2$, то $G_0$ сопряжено подгруппе $\langle i_1 i_2 i \rangle$ в $S_6$ и опять q над P имеет ветвление индекса 4, над которой p не разветвлено.

C) Предположим, что $t^*(P) = 3P_1$.

Ca) Если $\pi$ над $P_1$ не разветвлено, то $G_0 \cong \langle i, j \rangle$ и q над P имеет одну простую точку и одну точку ветвления индекса 3, причем p не разветвлено над ними.

Cв) Если $\pi$ разветвлено над $P_1$, то $G_0$ сопряжено $\langle i_1 j \rangle$ в $S_6$ и опять q над P имеет единственное ветвление индекса 3, но p уже разветвлено над обоими прообразами P.

Обозначим через $w_{Uv}$ число точек кривой X, принадлежащих типу (Uv). Положим $\delta = w_{Ab} + w_{Ad} + w_{Bb} + w_{Bc} + w_{Cb}$.

*Предложение*. Для родов соответствующих кривых башен (1) и (2) справедливо соотношение

$$g(\tilde{C}) - g(C) \leq g(\tilde{Y}) - g(Y),$$

за исключением случая $X = P_1$, $\delta = 0$. Равенство достигается в двух случаях:

(i) если X – проективная прямая $\mathbf{P}_1$ и $\delta = 2$;

(ii) если X—эллиптическая кривая и $\delta = 0$.

Доказательство сводится к вычислению родов указанных кривых по формуле Гурвица с учетом полученного описания ветвлений накрытий башен (1) и (2).

4. Исключим из рассмотрения те башни, для которых не выполняется неравенство доказанного предложения, т. е. случай $X = \mathbf{P}_1$, $\delta = 0$. Заметим, что он разобран в статье [1]. Для обозначения индуцированных накрытиями кривых гомоморфизмов прямого и обратного образов якобиевых многообразий используются соответственно нижняя и верхняя звездочки, а крышечка ^ обозначает двойственный морфизм дуальных абелевых многообразий. Напомним, что многообразие Прима двулистного накрытия $\pi: \tilde{C} \to C$ определяется как связная компонента нуля ядра гомоморфизма прямого образа (норменного отображения) $\pi_*: J(\tilde{C}) \to J(C)$. Многообразие Прима $P_\pi$ оснащается канонической поляризацией $\rho_\pi$, которая ассоциируется с главной поляризацией, если $\pi$ развлетвлено не более, чем в двух точках [2].

*Теорема.* Для многообразий Прима $P_\pi$ и $P_p$ двулистных накрытий $\pi$ и $p$ башен (1) и (2) существуют изогенное вложение $\alpha: P_\pi \to P_p$ и сюръективный гомоморфизм $\alpha': P_p \to P_\pi$, для которых $\alpha' \cdot \alpha = 4_{P_\pi}$. При этом $\ker\alpha \supset \pi^*(\ker t_*) \cap P_\pi$, $\ker\alpha' \supset p^*(\ker q_*) \cap P_p$, а канонические поляризации $\rho_\pi$ и $\rho_p$ примианов $P_\pi$ и $P_p$ связаны соотношением $\hat{\alpha} \cdot \rho_p \cdot \alpha = 4\rho_\pi$.

В случае башни (1) надо взять $\alpha = \check{t}_* \cdot \check{q}^*$, $\alpha' = \check{q}_* \cdot \check{t}^*$. Включения для ядер получаются из равенств $\alpha \cdot \pi^* = p^* \cdot q^* \cdot t_*$ и $\alpha' \cdot p^* = \pi^* \cdot t^* \cdot q_*$. Соотношение на поляризации проверяется непосредственным вычислением.

В случае башни (2), если положить $\bar{\alpha} = \bar{\mu}_* \cdot \check{t}_* \cdot \check{q}^* \cdot \bar{\nu}^*$ и $\bar{\alpha}' = \bar{\nu}_* \cdot \check{q}_* \cdot \check{t}^* \cdot \bar{\mu}^*$, получим $\bar{\alpha}' \cdot \bar{\alpha} = 16_{P_\pi}$, $\hat{\bar{\alpha}} \cdot \rho_p \cdot \bar{\alpha} = 16\rho_\pi$. Рассмотрением групп Галуа накрытий $\bar{\nu} \cdot \check{q}$ и $\bar{\mu} \cdot \check{t}$ нетрудно убедиться в существовании двулистного накрытия $\check{X} \to \check{X}_0$, через который пропускаются восьмилистное накрытие $\bar{\nu} \cdot \check{q}$ и шестилистное накрытие $\bar{\mu} \cdot \check{t}$. Поэтому $\bar{\alpha} = 2\alpha$, $\bar{\alpha}' = 2\alpha'$ и морфизмы $\alpha$, $\alpha'$ удовлетворяют требованиям теоремы.

Предположим теперь, что в башнях (1) и (2) $X = \mathbf{P}_1$, $\delta = 2$ и $w_{Ac} = w_{Bc} = w_{Ad} = 0$. Тогда размерности многообразий Прима $P_\pi$ и $P_p$ совпадают, причем двулистное накрытие $\pi$ разветвлено над двумя точками, отображающимися при $t$ в разные точки прямой $\mathbf{P}_1$, а двулистное накрытие $p$ имеет $2(w_{Bb} + w_{Cb}) \leqslant 4$ ветвлений. Значит, при $w_{Bb} + w_{Cb} \leqslant 1$ получим главно поляризованные примианы $(P_\pi, \Xi_\pi)$ и $(P_p, \Xi_p)$, где $\rho_\pi = 2\lambda_{\Xi_\pi}$, $\rho_p = 2\lambda_{\Xi_p}$ ([2]).

*Следствие.* Главно поляризованные абелевы многообразия $(P_\pi, \Xi_\pi)$ и $(P_p, \Xi_p)$ изоморфны.

Согласно [2] $\pi^*(\ker t_*) \cap P_\pi$, $p^*(\ker q_*) \cap P_p$ совпадают в точности с подгруппами точек второго порядка примианов $(P_\pi)_2$ и $(P_p)_2$. Поэтому

$$\#\ker(\alpha' \cdot \alpha) = \#\ker\alpha' \cdot \#\ker\alpha \geqslant \#(P_\pi)_2 \cdot \#(P_p)_2 = 2^{2\dim P_\pi} \, 2^{2\dim P_p} .$$

С другой стороны,

$$\#\ker(\alpha' \cdot \alpha) = \#\ker 4_{P_\pi} = 4^{2\dim P_\pi} .$$

Мы пользуемся известным фактом, что число точек $n$-того порядка на абелевом многообразии $A$ вычисляется по формуле

$$\#A_n = n^{2\dim A} \quad ([3]).$$

Из полученных равенств следует, что $\ker\alpha = (P_\pi)_2$, $\ker\alpha' = (P_p)_2$, следовательно, $\alpha = 2\alpha_0$, $\alpha' = 2\alpha_0'$ и $\alpha_0' \cdot \alpha_0 = 1$, $\alpha_0^*(\Xi_p) = \Xi_\pi$.

Таким образом, многообразие Прима двулистного накрытия тригональной кривой, разветвленного над двумя точками, не принадлежащими одному дивизору тригонального ряда, совпадает с многообразием Прима двулистного накрытия кривой с рядом $g_4^1$, которое не разветвлено, если точки ветвления накрытия тригональной кривой имеют тип (Aв) или (Bc), и разветвлено в двух точках, если эти ветвления типа (Bв) или (Cв).

5. Вышеприведенные результаты были подготовлены к печати, когда появился анонс [4], основной результат которого заключается в следующем. Пусть $\pi:\tilde{C}\to C$—неразветвленное двулистное накрытие неособой кривой C; $q:C\to \mathbf{P}_1$—четырехлистное тетрагональное накрытие. Тогда существует аналогичная вышеприведенной каноническая конструкция, названная тетрагональной и восходящая к Рециллас [5], позволяющая с тройкой $(\tilde{C}, C, q)$ ассоциировать еще две аналогичные тройки $(\tilde{C}_0, C_0, q_0)$ и $(\tilde{C}_1, C_1, q_1)$, так что многообразия Прима $P(\tilde{C}, C)$, $P(\tilde{C}_0, C_0)$ и $P(\tilde{C}_1, C_1)$ изоморфны. Далее,даются интересные приложения этого результата к вычислению слоев отображения Прима $P_g:R_g\to A_{g-1}$ из многообразия модулей $R_g$ неразветвленных двулистных накрытий $\pi:\tilde{C}\to C$ с неособой кривой C рода g в многообразие модулей $A_{g-1}$ главно поляризованных абелевых многообразий размерности $g-1$, к проблеме Торелли (инъективности отображения Прима) и к проблеме Шоттки (конкретнее—к уточнению результатов Андреотти-Майера [6] и Бовиля [7], описывающих неприводимые компоненты подмногообразия модулей $N_g\subset A_g$ многообразий Андреотти-Майера).

В связи с этими вопросами автор [4] выдвигает две гипотезы.

(i) Многообразия Прима неразветвленных двулистных накрытий изоморфны тогда и только тогда, когда накрываемые кривые тетрагональны, а двулистные накрытия получаются друг из друга последовательностью тетрагональных конструкций.

(ii) Все многообразия Андреотти-Майера принадлежат замыканию образа отображения Прима, т. е. исчерпываются якобианами кривых и примианами двулистных накрытий тетрагональных и приводимых кривых.

Наши результаты позволяют сделать следующие замечания к первой гипотезе. Во-первых, если взять две точки ветвления накрытия $\pi$ типов (Ав) или (Вс), то двулистное накрытие p оказывается неразветвленным и получается, что примиан неразветвленного накрытия тетрагональной кривой может быть изоморфным примиану разветвленного накрытия тригональной кривой. Во-вторых, естественней не ограничиваться примианами неразветвленных накрытий, а рассматривать также развлетвленные двулистные накрытия. Согласно следствию п. 4 в специальных случаях расположения двух точек ветвления (типы (Вв) и (Св)) разветвленный тетрагональный примиан оказывается изоморфным разветвленному тригональному примиану.

*Кафедра высшей алгебры*
*и геометрии*

*Поступила 14.03.1983*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Далалян С. Г.** Башни кривых и многообразия Прима.—Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 1979, т. XIV, № 1, с. 49—69.
2. **Mumford D.** Prym varieties, I, Contributions to Analysis.—Academic Press, New York: 1974
3. **Мамфорд Д.** Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971.
4. **Donagi R.** The tetragonal construction.—Bull. Amer. Math. Soc., 1981, v. 4, №2, p. 181—185.

5. **Recillas S.** Jacobians of curves with a $g^1_4$ are Prym varieties of trigonal curves.— Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1974, v. 19, p. 9–13.
6. **Andreotti A., Mayer A.** On period relations for abelian integrals on algebraic curves.—Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 1976, v. 21, p. 189—238.
7. **Beauville A.** Prym varieties and the Schottky problem.—Invent. Math., 1977, v. 41, p. 149—196.

Ս. Հ. ԴԱԼԱՅԱՆ

## ԵՌԱԾԱՆԿ ԿՈՐԻ ՃՅՈՒՂԱՎՈՐՎԱԾ ԵՐԿԹԵՐԹԱՆԻ ԾԱԾԿՈՑԻ ՊՐԻՄԻ ԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Ելնելով լրիվ ողորկ կորերի* $\pi:\tilde{C}\to C$ *երկթերթ և* $t:C\to X$ *եռաթերթ ծածկոցներից՝ կառուցվում են* $q:Y\to X$ *քառաթերթ և* $p:\tilde{Y}\to Y$ *երկթերթ ծածկոցներ այնպես, որ երկթերթ ծածկոցների Պրիմի բազմաձևությունները կապված են հոմոմորֆիզմների զույգով, որոնք* $X=P_1$ *և ճյուղավորման որոշ սահմանափակման դեպքերում մակածում են փոխհակադարձ իզոմորֆիզմներ։*