ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1983 Естественные науки

Математика

УДК 517.51

Г. Г. ГЕВОРКЯН

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПОДСИСТЕМ СИСТЕМЫ ХААРА

В настоящей заметке дается полное описание подсистем системы Хаара, для которых существуют U_p множества сколь угодно малой меры.

Определение. Пусть $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная на отрезке [0, 1] система функций. Скажем, что $E\subset[0,1]$ является U_p множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, если из условий $f(x)=0$, п. в. на E и $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\times\times dx\right|^p<+\infty$ следует, что $f(x)=0$ п. в. на [0,1].

В работе [1] доказана

Теорема 1. Для любой полной ортонормированной равномерно ограниченной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и любого $\varepsilon>0$ существует множество $E\subset[0, 1]$, $\mu E<\varepsilon$, которое является U_p множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ при любом $p<2$.

В этой же работе [1] показано, что теорема 1 верна также для системы Хаара, и поставлен вопрос о возможности распространения теоремы 1 на любые полные ортонормированные системы.

Позже независимо друг от друга автором [2] и Л. Галзани [3] доказана

Теорема 2. Для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и любого $\varepsilon>0$ существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E<\varepsilon$, которое является U_p множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ при любом $p<2$.

Для неполных систем вопрос обстоит несколько иначе. Здесь рассматриваются такие неполные системы, которые являются подсистемами системы Хаара.

Обозначим через $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ систему Хаара (опр. см. в [4]), а через Δ_n — носитель функции $\chi_n(x)$. Из определения функций системы Хаара видно, что

$$\mu\Delta_n=2^{-[\log_2 n]}, \tag{1}$$

$$\|\chi_n(x)\|_{\infty}=\sup_{0<x<1}|\chi_n(x)|=(\mu\Delta_n)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Теорема 3. Пусть $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ —подсистема системы Хаара. Чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало множество $E\subset[0,1]$, $\mu E<\varepsilon$, являющееся U_p множеством для $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ при всех $p<2$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu(\limsup \Delta_{n_k})=1, \tag{3}$$

где $\Delta_{n_k}=\{\chi_{n_k}(x)\neq 0\}$.

При доказательстве теоремы 3 используется следующая

Лемма. Пусть $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ —подсистема системы Хаара, удовлетворяющая условию (3). Тогда для любых $q>2$, $\varepsilon>0$ и $\left[0, \frac{\varkappa}{2^\nu}\right]\subset[0, 1]$ существует полином $P(x)=\sum\limits_k a_k\chi_{n_k}(x)$ такой, что

1° $P(x)=0$, когда $x\bar{\in}\left[0, \frac{\varkappa}{2^\nu}\right]$ и $P(x)=1$, когда $x\in\left[0, \frac{\varkappa}{2^\nu}\right]\setminus A$, где $A\subset\left[0, \frac{m}{2^\nu}\right]$ и $\mu A<\varepsilon$:

2° $\{\sum\limits_k |a_k|^q\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon$.

Доказательство. Обозначим

$$B=\limsup \Delta_{n_k}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\Delta_{n_k}.$$

Из (3) и из того, что $\mu\Delta_{n_k}\to 0$, следует ,что множество B покрывается системой отрезков $\{\Delta_{n_k}\}$ в смысле Витали.

Возьмем некоторое число $j_1>2^\nu$ (j_1 пока произвольное). Система $\{\Delta_{n_k}\}_{n_k>j_1}$ покрывает $B\cap\left[0, \frac{\varkappa}{2^\nu}\right]$ в смысле Витали. Поэтому существует конечная система отрезков $\{\Delta_{n_k^{(1)}}\}$ из $\{\Delta_{n_k}\}_{n_k>j_1}$ такая, что

$$\Delta_{n_k^{(1)}}\subset\left[0, \frac{\varkappa}{2^\nu}\right], \tag{4}$$

$$n_k^{(1)}\in\{n_k\},\quad n_k^{(1)}>j_1, \tag{5}$$

$$\Delta_{n_k^{(1)}}\cap\Delta_{n_{k'}^{(1)}}=\varnothing,\quad k\neq k' \quad \text{и} \quad \mu(\bigcup_k \Delta_{n_k^{(1)}})>\frac{\varkappa}{2^\nu}-\frac{\varepsilon}{2^s}. \tag{6}$$

Тогда функция

$$f_1(x)=\sum_k(\mu\Delta_{n_k^{(1)}})^{-\frac{1}{2}}\chi_{n_k^{(1)}}(x)=\begin{cases} 1 & \text{на } \bigcup\limits_k \Delta^+_{n_k^{(1)}}, \\ -1 & \text{на } \bigcup\limits_k \Delta^-_{n_k^{(1)}}, \\ 0 & \text{вне } \bigcup\limits_k \Delta_{n_k^{(1)}}, \end{cases} \tag{7}$$

где $\Delta_n^+=\{x\in[0,\ 1]:\chi_n(x)>0\}$ и $\Delta_n^-=\{x\in[0,\ 1]:\chi_n(x)<0\}$.

Возьмем такое j_2, чтобы

$$2^{-[\log_2 j_2]}<\min_k(\mu\Delta^-_{n_k^{(1)}}). \tag{8}$$

Тогда система отрезков $\{\Delta_{n_k}\}_{n_k>j_2}$ покрывает множество $B\bigcap(\bigcup_k\Delta^-_{n_k^{(1)}})$ в смысле Витали. Поэтому существует конечная система отрезков $\{\Delta_{n_k^{(2)}}\}$ из $\{\Delta_{n_k}\}_{n_k>j_2}$ такая, что

$$\Delta_{n_k^{(2)}}\subset\bigcup_k\Delta^-_{n_k^{(1)}}, \tag{9}$$

$$n_k^{(2)}\in\{n_k\},\quad n_k^{(2)}>j_2, \tag{10}$$

$$\Delta_{n_k^{(2)}}\bigcap\Delta_{n_{k'}^{(2)}}=\varnothing,\ k\neq k' \text{ и } \mu(\bigcup_k\Delta_{n_k^{(2)}})>\mu(\bigcup_k\Delta^-_{n_k^{(1)}})-\frac{\varepsilon}{2^3}. \tag{11}$$

Тогда функция

$$f_2(x)=\sum_k(\mu\Delta_{n_k^{(2)}})^{-\frac{1}{2}}\chi_{n_k^{(2)}}(x)=\begin{cases}2 & \text{на } \bigcup_k\Delta^+_{n_k^{(2)}},\\ -2 & \text{на } \bigcup_k\Delta^-_{n_k^{(2)}},\\ 0 & \text{вне } \bigcup_k\Delta_{n_k^{(2)}}.\end{cases} \tag{12}$$

Продолжая этот процесс m раз, где m такое, что $2^{-m}<\frac{\varepsilon}{2}<2^{-m+1}$, получим последовательность функций $f_l(x)$ таких, что

$$f_l(x)=\sum_k 2^{l-1}(\mu\Delta_{n_k^{(l)}})^{-\frac{1}{2}}\chi_{n_k^{(l)}}(x)=\begin{cases}2^{l-1} & \text{на } \bigcup_k\Delta^+_{n_k^{(l)}},\\ -2^{l-2} & \text{на } \bigcup_k\Delta^-_{n_k^{(l)}},\\ 0 & \text{вне } \bigcup_k\Delta_{n_k^{(l)}},\end{cases} \tag{13}$$

где

$$\Delta_{n_k^{(l)}}\subset\bigcup_k\Delta^-_{n_k^{(l-1)}}, \tag{14}$$

$$n_k^{(l)}\in\{n_k\},\quad n_k^{(l)}>j_l>2j_{l-1}, \tag{15}$$

$$\Delta_{n_k^{(l)}}\bigcap\Delta_{n_{k'}^{(l)}}=\varnothing, \text{ когда } k\neq k' \text{ и } \mu(\bigcup_k\Delta_{n_k^{(l)}})> \tag{16}$$

$$>\mu(\bigcup_k\Delta^-_{n_k^{(l-1)}})-\frac{\varepsilon}{2^{l+1}}.$$

Из (13), (14) и (16) следует, что полином $P(x)=\sum_{l=1}^{m}f_l(x)=\sum_k a_k\chi_{n_k^{(x)}}$ удовлетворяет условию 1° леммы. Проверим условие 2°.

$$\sum_k |a_k|^q = \sum_{i=2}^m \sum_k [2^{i-1}(\mu\Delta_{n_k^{(i)}})^{\frac{1}{2}}]^q + \sum_k (\mu\Delta_{n_k^{(1)}})^{\frac{q}{2}} =$$

$$= \sum_{i=2}^m \sum_k 2^{q(i-1)}(\mu\Delta_{n_k^{(i)}})^{\frac{q}{2}-1}\cdot\mu\Delta_{n_k^{(2)}} + \sum_k (\mu\Delta_{n_k^{(1)}})^{\frac{q}{2}-1}\mu\Delta_{n_k^{(1)}}. \tag{17}$$

Учитывая, что $\sum_k \mu\Delta_{n_k^{(i)}} < \frac{1}{2^{i-1}}$ (это следует из (3)), из (17) и (15) получим

$$\sum_k |a_k|^q < \sum_{i=2}^m \max_k (\mu\Delta_{n_k^{(i)}})^{\frac{q}{2}-1} 2^{q(i-1)}\cdot\frac{1}{2^{i-1}} + \max_k (\mu\Delta_{n_k^{(1)}})^{\frac{q}{2}-1} <$$

$$< \sum_{i=2}^m 4\cdot 2^{-j_i\left(\frac{q}{2}-1\right)}\cdot 2^{q(i-1)} + 2^{-j_1\left(\frac{q}{2}-1\right)}. \tag{18}$$

До сих пор j_i были произвольными. Учитывая, что $\frac{q}{2}-1>0$, числа j_i можно взять настолько большими, чтобы выполнилось условие 2°. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Достаточность. Выберем $\varepsilon_{j,n}>0$ так, чтобы $\sum_{j,n}\varepsilon_{j,n}<\varepsilon$. Обозначим через $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ двоично-рациональные числа, и пусть $q_j \downarrow 2$. Тогда по лемме существуют полиномы $P_{n,j}(x) = \sum_k a_{n,j}^{(k)}\chi_{n_k}(x)$ такие, что

1° $P_{n,j}(x)=0$, когда $x\overline{\in}[0, x_n]$, и $P(x)=1$, когда $x\in[0, x_n]\setminus A_{n,j}$, где $A_{n,j}\subset[0, x_n]$ и $\mu A_{n,j}<\varepsilon_{n,j}$;

2° $\left\{\sum_k |a_{n,j}^{(k)}|^{q_j}\right\}^{\frac{1}{q_j}} < \varepsilon_{n,j}$.

Обозначим $E=\bigcup_{n,j} A_{n,j}$. Ясно, что $\mu E<\varepsilon$. Покажем, что E является U_p множеством для $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ при любом $p<2$. Пусть $f(x)=0$ на E и $A=\left\{\sum_{k=1}^\infty \left|\int_0^1 f(x)\chi_{n_k}(x)\,dx\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty$, $p<2$. Тогда для любых x_n и $p_j>p$ (где p_j—сопряженное к q_j) имеем:

$$\left|\int_0^{x_n} f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 P_{n,j}(x)f(x)dx\right| = \left|\sum_k a_{n,j}^{(k)}\int_0^1 f(x)\chi_{n_k}(x)dx\right| <$$

$$< \left\{\sum_{k=m}^\infty \left|\int_0^1 f(x)\chi_{n_k}(x)\,dx\right|^{p_j}\right\}^{\frac{1}{p_j}} \left\{\sum_k |a_{n,j}^{(k)}|^{q_j}\right\}^{\frac{1}{q_j}} < A\varepsilon_{n,j}\to 0, \text{ когда } j\to+\infty.$$

Из того, что $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ всюду плотно на $[0,1]$, следует, что $f(x)=0$ п. в. на $[0,1]$.

Необходимость. Допустим условие (3) не выполнено. Тогда множество тех точек из $[0,1]$, которые принадлежат только конечному числу Δ_{n_k}, имеет положительную меру. Обозначим через A_n множество тех точек из $[0, 1]$, которые принадлежат не более, чем n множествам из $\{\Delta_{n_k}\}$. Тогда для некоторого N имеем

$$\mu A_N = a > 0.$$

Пусть $\varepsilon < a$. Тогда ни одно множество, мера которого меньше, чем ε, не является U_p множеством ни при одном p. Действительно, характеристическая функция множества $A_N \setminus E$ отлична от нуля, равна нулю на E, и всего N коэффициентов Фурье по системе $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ отлично от нуля. Теорема доказана.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Поступила 25.03.1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Golzani L.**, Sets of Uniqueness of lp for General Orthonormal Complete Systems.—Boll. U. M. I., 1979, p. 1134—1143.
2. **Геворкян Г. Г.** О множествах единственности для полных ортонормированных систем.—Мат. заметки, 1982, т. 32, № 5, с. 651—656.
3. **Golzani L.** Existense of sets of Uniqueness of lp for General Orthonormal Systems.—Proc. Amer. Math. Soc. 1981, v. 83, № 3, p. 569—571.
4. **Алексич Г.** Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1963.

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՀԱԱՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԵՆԹԱՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցված է.

Թեորեմ. Որպեսզի կամայական ε *դրական թվի համար գոյություն ունենա Հաարի համակարգի* $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *ենթահամակարգի* U_p *բազմություն,* $p<2$, *որի չափը փոքր է* ε*-ից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\mu(\limsup \Delta_{n_k})=1,$$

որտեղ $\Delta_{n_k}=\{x\in[0, 1]:\chi_{n_k}(x)\neq 0\}$: