ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

**Բնական գիտություններ** 2, 1981 **Естественные науки**

***Математика***

УДК 517.51

Г. Г. ГЕВОРКЯН

# О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ПО НЕКОТОРЫМ ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

**В работе доказывается существование множеств единственности (относительно классов $L_p$, $p<2$) для рядов по некоторым полным ортонормированным системам (в частности по системам Хаара и Уолша).**

## § 1. Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании множеств единственности полной меры для некоторых полных ортонормированных систем (в частности для систем Хаара и Уолша).

*Определение 1* (см. [1]). Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$—полная в $L_2(0,1)$ ортонормированная система функций. Скажем, что $E\subset[0,1]$—множество единственности для системы $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, если не существует отличной от нуля интегрируемой функции, которая равна нулю вне $E$, а коэффициенты Фурье которой по системе $\{\psi_n(x)\}$ принадлежат классу $L_p$ для некоторого $p<2$.

В работе [1] доказана следующая

Теорема А (Л. ГОЛЗАНИ). Для любой полной в $L_2(0,1)$ ортонормированной ограниченной системы существует множество единственности сколь угодно большой меры.

В работе [1] доказано также существование множеств единственности сколь угодно большой меры для системы Хаара и поставлен вопрос: существует ли для любой полной ортонормированной системы множество единственности сколь угодно большой меры? В работе [2] дан положительный ответ на этот вопрос. А именно верна следующая

Теорема В. Для любой полной в $L_2(0,1)$ ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и любого $\varepsilon>0$ существует множество $E$, $\mu E>1-\varepsilon$, такое, что если $f(x)=0$ почти всюду на $[0,1]\setminus E$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx\right|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$, то $f(x)=0$—почти всюду на $[0,1]$.

Введем следующее определение (см. также [3]).

*Определение 2.* Скажем, что $E\subset[0,1]$—множество единственности для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, если из $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)=0$ для любого x, не принадлежащего E, следует, что $a_k=0$ для всех $k=0, 1, 2, \ldots$ .

В [3] доказана

Теорема C (МИЧЕЛЬ, СОРДИ). Для тригонометрической системы существует множество единственности полной меры.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$—полная в $L_2(0,1)$ ортонормированная система функций и каждая функция $\varphi_n(x)$ имеет лишь конечное число точек разрыва. Тогда существует множество E, $\mu E=1$, такое, что если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и для некоторой последовательности $m_i$, $i=1, 2, \ldots$, выполняются условия

$$\sigma_l(x)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{n=0}^{m_i} a_n\varphi_n(x)}{l}\to 0,\ |\sigma_l(x)|\leqslant M<+\infty \text{ для всех } x\bar{\in}E, \tag{1}$$

то все коэффициенты $a_k$, $k=1, 2, \ldots$ равны нулю.

Теорема 2. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$—система Хаара на [0,1]. Тогда существует множество $A\subset[0,1]$, $\mu A=1$, такое, что если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_k|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и для некоторой подпоследовательности $n_k$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(x)=0 \text{ для всех } x\bar{\in}A, \tag{2}$$

то $a_k=0$ для всех k.

Теорема 3. Пусть $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ —система Уолша-Пели, тогда существует множество $A\subset[0,1]$, $\mu A=1$, такое, что если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nW_n(x)=0$ для всех $x\bar{\in}A$, то все $a_k$ равны нулю.

Легко видеть, что никакое множество со счетным дополнением не является множеством единственности ни для системы Хаара, ни для системы Уолша-Пели.

## § 2. Доказательство основных лемм

*Лемма 1.* Для любой полной в $L_2(0,1)$ ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, любых $\varepsilon>0$, $q>2$, $(a, b)\subset[0,1]$ и любого $\alpha>0$ существует монотонная непрерывная функция $f(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1° $f'(x)=0$ при $x\bar{\in}\bar{E}$, где E—объединение конечного числа интервалов, лежащих в (a, b) и $\mu E=\varepsilon(b-a)$;

2° $f'(x)=\frac{\alpha}{\varepsilon}$ при $x\in E$;

3° $f(x)=0$ при $x\leqslant a$ и $f(x)=\alpha(b-a)$ при $x\geqslant b$;

4° $\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_a^b \varphi_k(x)d[f(x)-\alpha x]\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon$.

*Доказательство.* Обозначим через $\chi(x)$ характеристическую функцию отрезка $[a, b]$. Отрезок $[a, b]$ разделим на непересекающиеся интервалы $I_1, I_2, \ldots, I_m$ так, чтобы

$$\mu I_\nu<\frac{\gamma^2\varepsilon}{2^4} \quad \nu=1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$

где $\gamma$ выбрано так, чтобы

$$\gamma^{1-\frac{2}{q}}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q}}<\varepsilon. \tag{4}$$

Из леммы 2.11.3 книги [4] (см. также [5]) вытекает существование функции $g_1(x)$ и множества $E_1$ таких, что $\mu E_1=\varepsilon\mu I_1$, (5)
причем $E_1$—объединение конечного числа интервалов, лежащих в $I_1$:

$$g_1(x)=\frac{1}{\varepsilon} \text{ на } E_1 \text{ и } g_1(x)=0 \text{ на } [0,1]\setminus E_1, \tag{6}$$

$$\left|\int_{I_1}\chi(x)\varphi_0(x)dx-\int_{I_1}g_1(x)\varphi_0(x)dx\right|<\frac{\gamma}{2^3}. \tag{7}$$

Возьмем $n_2>0$ такое, что

$$\left|\int_{I_1}[\chi(x)-g_1(x)]\varphi_k(x)dx\right|<\frac{\gamma}{2^3}, \text{ тогда } k\geqslant n_2. \tag{8}$$

Пусть теперь функции $g_i(x)$ определены при $i\leqslant\nu-1$, причем $g_i(x)=0$ для $x\bar{\in}I_i$. Тогда существует натуральное число $n_\nu$ такое, что

$$\left|\int_{\bigcup_{i=1}^{\nu-1}I_i}\left[\chi(x)-\sum_{i=1}^{\nu-1}g_i(x)\right]\varphi_k(x)dx\right|<\frac{\gamma}{2^{\nu+1}}, \text{ когда } k\geqslant n_\nu. \tag{9}$$

Затем по лемме 2.11.3 из [4] определяем функцию $g_\nu(x)$, требуя выполнение следующих условий:

$$g_\nu(x)=\frac{1}{\varepsilon} \text{ на } E_\nu \text{ и } g_\nu(x)=0 \text{ на } [0, 1]\setminus E_\nu, \tag{10}$$

$\mu E_\nu=\varepsilon\mu I_\nu$, и $E_\nu$—объединение конечного числа интервалов, лежащих в $I_\nu$, (11)

$$\left|\int\limits_{I_\nu}[\chi(x)-g_\nu(x)]\varphi_k(x)dx\right|<\frac{\gamma}{2^{\nu+1}},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n_\nu. \tag{12}$$

Положим

$$f(x)=\alpha\int\limits_0^x\sum_{\nu=1}^m g_\nu(t)dt. \tag{13}$$

Из (10) и (11) вытекают условия 1°, 2° и 3° для функции f(x). Остается доказать выполнение условия 4°. Для этого достаточно доказать, что

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int\limits_0^1\left[\sum_{\nu=1}^m g_\nu(x)-\chi(x)\right]\varphi_k(x)dx\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon. \tag{14}$$

Обозначим $\psi(x)=\sum\limits_{\nu=1}^m g_\nu(x)-\chi(x)$. Из (10), (11) и (3) получаем

$$\int\limits_{I_\nu}g_\nu^2(x)dx=\frac{1}{\varepsilon^2}\,\varepsilon\mu I_\nu<\frac{\gamma^2}{2^4}. \tag{15}$$

Отсюда следует

$$\left|\int\limits_{I_\nu}\psi(x)\varphi_k(x)\,dx\right|=\left|\int\limits_{I_\nu}g_\nu(x)\varphi_k(x)dx-\int\limits_{I_\nu}\chi(x)\,\varphi_k(x)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{I_\nu}\chi^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int\limits_{I_\nu}\varphi_k^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\int\limits_{I}g_\nu^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int\limits_{I_\nu}\varphi_k^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}<$$

$$<\frac{\gamma\sqrt{\varepsilon}}{2^2}+\frac{\gamma}{2^2}<\frac{\gamma}{2}. \tag{16}$$

Из (16) и (9) для $k\geqslant n_m$ получаем

$$\left|\int\limits_0^1\psi(x)\varphi_k(x)dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{\sum\limits_{\nu=1}^{m-1}I_\nu}\psi(x)\varphi_k(x)dx\right|+\left|\int\limits_{I_m}\psi(x)\varphi_k(x)dx\right|<\frac{\gamma}{2^{m+1}}+\frac{\gamma}{2}<\gamma. \tag{17}$$

Пусть $n_{\nu-1}\leqslant k<n_\nu$. Из (9), (12) и (16) следует неравенство

$$\left|\int\limits_0^1\psi(x)\varphi_k(x)dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{\sum\limits_{i=1}^{\nu-2}I_i}\psi(x)\varphi_k(x)dx\right|\left|\int\limits_{I_{\nu-1}}\psi(x)\varphi_k(x)dx\right|+$$

$$+\left|\sum_{i=\nu}^{m}\int_{I_i}\psi(x)\varphi_k(x)\right|<\frac{\gamma}{2^\nu}+\frac{\gamma}{2}+\sum_{i=\nu}^{m}\frac{\gamma}{2^{i+1}}<\gamma. \tag{18}$$

Из (10) и (11) имеем

$$\|\psi(x)\|_{L^2}\leqslant\|\chi(x)\|_{L^2}+\|\sum_{\nu=1}^{m}g_\nu(x)\|_{L^2}=(b-a)^{\frac{1}{2}}+\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon(b-a)\right\}^{\frac{1}{2}}<\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{19}$$

Обозначим

$$a_k=\int_0^1\psi(x)\varphi_k(x)dx. \tag{20}$$

Из (18) и (19) вытекает

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2|a_k|^{q-2}\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant\left\{\sup_k|a_k|\right\}^{1-\frac{2}{q}}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right\}^{\frac{1}{q}}<$$

$$<\gamma^{1-\frac{2}{q}}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q}}<\varepsilon. \tag{21}$$

Лемма 1 доказана.

Для доказательства теорем нам нужна следующая

*Лемма 2.* Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$полная в $L_2(0,1)$ ортонормированная система и каждая функция $\varphi_n(x)$ разрывна лишь в конечном числе точек. Тогда для любых $\varepsilon>0$, $q>2$ и $(a, b)\subset(0,1)$ существует монотонная сингулярная функция $\psi(x)$, удовлетворяющая следующему условию:

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_a^b\varphi_k(x)d[\psi(x)-x]\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon.$$

*Доказательство.* Возьмем $\varepsilon_i>0$ такие, что $\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i<\varepsilon$. Из леммы 1 вытекает существование функции $f_1(x)$ такой, что

1) $f_1'(x)=0$ при $x\in\bar{E}_1$, где $E_1$—объединение конечного числа интервалов, лежащих в $(a, b)$ и $\mu E_1=\varepsilon_1(b-a)$;

2) $f_1'(x)=\frac{1}{\varepsilon_1}$ при $x\in E_1$;

3) $f_1(x)=0$ при $x\leqslant a$ и $f_1(x)=b-a$ при $x\geqslant b$;

4) $\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_a^b\varphi_k(x)d[f_1(x)-x]\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon_1.$

Пусть $E_1^j$, $j=1, 2, \ldots, \nu_1$—составляющие интервалы $E_1$, т. е. $E_1=\bigcup_{j=1}^{\nu_1}E_1^j$ и $E_1^{j_1}\cap E_1^{j_2}=\varnothing$, $j_1\neq j_2$. Функция $f_1'(x)$ на $E_1^j$ принимает значение $\frac{1}{\varepsilon_1}$.

Применяя лемму 1 для $\alpha=\frac{1}{\varepsilon_1}$, $\varepsilon=\frac{\varepsilon_2}{\nu_1}$ и интервалов $E_1^j$, получим монотонно возрастающие непрерывные функции $f_2^j$ такие, что

5) $(f_2^j)'(x)=0$ при $x\bar{\in}\bar{B}_2^j$, где $B_2^j$ —объединение конечного числа интервалов, лежащих в $E_1^j$ и $\mu B_2^j=\frac{\varepsilon_2}{\nu_1}\mu E_1^j$;

6) $(f_2^j)'(x)=\frac{1/\varepsilon_1}{\varepsilon_2/\nu_1}$ при $x\in B_2^j$;

7) $f_2^j(x)=0$ при $x\leqslant a_1^j$ и $f_2^j(x)=\frac{1}{\varepsilon_1}(b_1^j-a_1^j)$ при $x\geqslant b_1^j$, где $(a_1^j, b_1^j)=E_1^j$;

8) $\left\{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\int\limits_{E_1^j}\varphi_k(x)d[f_2^j(x)-f_1(x)]\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}<\frac{\varepsilon_2}{\nu_1}$.

Обозначим $f_2(x)=\sum\limits_{j=1}^{\nu_1}f_2^j(x)$ и $E_2=\bigcup\limits_{j=1}^{\nu_1}B_2^j$. Функция $f_2(x)$ монотонно возрастающая и непрерывная, причем $f_2(x)=f_1(x)$ при $x\bar{\in}E_1$. Из 4) и 8) следует, что

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_a^b\varphi_k(x)d[f_2(x)-x]\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon_1+\varepsilon_2. \tag{22}$$

Кроме того, функция $f_2$ удовлетворяет следующим условиям:

9) $f_2'(x)=0$ при $x\bar{\in}\bar{E}_2$, где $E_2$—объединение конечного числа интервалов, лежащих в $(a, b)$, причем $E_2\subset E_1$ и $\mu E_2=\frac{\varepsilon_2\varepsilon_1}{\nu_1}(b-a)$ (это следует из 5) и 1));

10) $f_2'(x)=\frac{\nu_1}{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}$ при $x\in E_2$ (см. 6));

11) $f_2(x)=0$ при $x\leqslant a$ и $f_2(x)=b-a$ при $x\geqslant b$.

Продолжая этот процесс, получим последовательности монотонно возрастающих непрерывных функций $f_n(x)$ и множеств $E_n$, удовлетворяющих следующим условиям:

А) $f_n'(x)=0$ при $x\bar{\in}\bar{E}_n$, где $E_n$—объединение конечного числа интервалов, лежащих в $(a, b)$, причем $E_n\subset E_{n-1}$ и $\mu E_n=\frac{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}(b-a)$;

В) $f_n'(x)=\frac{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ при $x\in E_n$;

С) $f_n(x)$ при $x\leqslant a$ и $f_n(x)=b-a$ при $x\geqslant b$;

Д) $\left\{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\int\limits_a^b\varphi_k(x)d[f_n(x)-x]\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}<\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i$;

Е) $f_n(x)=f_{n-1}(x)$ при $x\overline{\in}\ \overline{E}_{n-1}$.

Последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к некоторой монотонной непрерывной функции $\psi(x)$. Из А) и Е) следует, что $\psi'(x)=0$ почти всюду. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\psi(x)$ всюду, полные вариации функций $f_n(x)$ равномерно ограничены $\left(\overset{b}{\underset{a}{V}} f_n=b-a\right)$ и $\varphi_k(x)$ кусочно-непрерывны, то по теореме Хелли (см. [6], стр. 254) в Д) можно перейти к пределу. Получится

$$\left\{\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left|\int_a^b \varphi_k(x)d[\psi(x)-x]\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}<\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon_l<\varepsilon. \tag{23}$$

Этим доказательство леммы завершается.

## § 3. Доказательство теорем

*Доказательство* теоремы 1. Пусть $\{I_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ —последовательность интервалов, концы которых—рациональные точки. Возьмем $q_\nu\downarrow 2$ и $\varepsilon_\mu^\nu>0$ такие, что $\sum\limits_{\mu,\ \nu}\varepsilon_\mu^\nu<+\infty$.

Тогда существуют монотонно возрастающие сингулярные функции $f_\mu^\nu(x)$ такие, что

$$\left\{\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left|\int_{I_\mu}\varphi_k(x)d[f_\mu^\nu(x)-x]\right|^{q_\nu}\right\}^{\frac{1}{q_\nu}}<\varepsilon_\mu^\nu. \tag{24}$$

Обозначим через $E$ множество тех точек, где существуют и равны нулю производные всех функций $f_\mu^\nu(x)$. Ясно, что $\mu E=1$. Покажем, что $E$ удовлетворяет требованиям теоремы 1. Пусть коэффициенты $\{a_n\}$ и последовательность $\{m_l\}$ удовлетворяют требованиям теоремы 1. Допустим, не все коэффициенты $a_k$ равны нулю. Тогда существуют интервал $I_\mu$, $a>0$ и номер $K$ такие, что

$$\left|\int_{I_\mu}\sigma_l(x)dx\right|>a \text{ при всех } l\geqslant K, \tag{25}$$

так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$—ряд Фурье из $L_2[0,1]$.

Пусть $\frac{1}{p_\nu}+\frac{1}{q_\nu}=1$ и $\sigma_l(x)=\sum\limits_{n=0}^{m_l}b_n^{(l)}\varphi_n(x)$. Ясно, что $|b_n^{(l)}|\leqslant|a_n|$.

Тогда имеем

$$\left|\int\limits_{I_\mu}\sigma_l(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{I_\mu}\sigma_l(x)d[f_\mu^\nu(x)-x]\right|+\left|\int\limits_{I_\mu}\sigma_l(x)\,df_\mu^\nu(x)\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=0}^{m_l}b_n^{(l)}\int\limits_{I_\mu}\varphi_n(x)d[f_\mu^\nu(x)-x]\right|+\left|\int\limits_{I_\mu}\sigma_l(x)df_\mu^\nu(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{n=0}^{m_l}|a_n|^{p_\nu}\right\}^{\frac{1}{p_\nu}}\varepsilon_\mu^\nu+\left|\int\limits_{I_\mu}\sigma_l(x)df_\mu^\nu(x)\right|. \qquad (26)$$

Выбирая $\nu$ достаточно большим, первое слагаемое можем сделать меньше $\frac{a}{2}$. После чего, так как $\sigma_l(x)$ равномерно ограничены и сходятся к нулю на носителе меры $df_\mu^\nu$, можно $l$ взять настолько большим, чтобы второе слагаемое было меньше $\frac{a}{2}$ (по теореме Лебега). Но это противоречит (25). Значит все $a_k$ равны нулю. Теорема доказана.

Из теоремы 1 непосредственно следуют теоремы.

Теорема 4. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$—полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система функций и каждая функция $\varphi_n(x)$ имеет конечное число точек разрыва. Тогда существует множество $E$, $\mu E=1$, такое, что если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{n_k}a_n\varphi_n(x)=0$ при $x\bar{\in}E$ для некоторой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{n_k}a_n\varphi_n(x)$ равномерно ограничены вне $E$, то все $a_k$ равны нулю.

Теорема 5. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$—полная в $L_2(0,1)$ ортонормированная система функций и каждая функция $\varphi_n(x)$ имеет конечное число точек разрыва. Тогда существует множество $E$, $\mu E=1$, такое, что если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{k}a_n\varphi_n(x)=0$ при $x\bar{\in}E$ и суммы Фейера $\sigma_k(x)=\sum\limits_{n=0}^{k}\left(1-\frac{n}{k+1}\right)a_n\varphi_n(x)$ равномерно ограничены вне $E$, то все $a_n$ равны нулю.

*Доказательство* теоремы 2. Пусть $F_m$—замкнутые множества единственности в смысле определения 1 и $\mu F_m\to1$, а $B_m$—открытое покрытие двоично-рациональных чисел, причем $B_m\subset B_{m-1}$ и $\mu B_m<2^{-n-2}$. Обозначим $B=\bigcap\limits_m B_m$, $F=\bigcup\limits_m F_m$. Покажем, что множество $A=E\cap B^c\cap F$, где $E$—полученное в теореме 4 множество, когда $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с системой Хаара, удовлетворяет требованиям теоремы 2.

Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{n_k} a_k\chi_k(x)=0$ при $x\in B$ для некоторой $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Покажем, что в этом случае множество тех точек, где

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\sum_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(x)\right|\geqslant 1,$$

—множество типа $G_\delta$, т. е. пересечение счетного числа открытых множеств. Определим функции $f_k(x)$ следующим образом. Возьмем частичную сумму $S_{n_k}(x)=\sum\limits_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(x)$. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ —точки разрыва $S_{n_k}(x)$. Тогда для каждой точки $x_i$ возможны два случая:

1) $|S_{n_k}(x_i)|\leqslant\min\{|S_{n_k}(x_i+)|, |S_{n_k}(x_i-)|\}$,

2) $|S_{n_k}(x_i)|>\min\{|S_{n_k}(x_i+)|, |S_{n_k}(x_i-)|\}$.

В первом случае берем интервал, лежащий в $B_{n_k}$ с центром в $x_i$, функцию $f_k(x)$ положим равной $S_{n_k}(x)$ в концах этого интервала и продолжим линейно внутри интервала. Во втором случае

а) $|S_{n_k}(x_i+)|>|S_{n_k}(x_i-)|$ или

б) $|S_{n_k}(x_i+)|<|S_{n_k}(x_i-)|$.

При выполнении а) берем интервал, лежащий в $B_{n_k}$ с левым концом $x_i$. Функцию $f_k(x)$ на этом интервале полагаем линейную, которая в левом конце принимает значение $S_{n_k}(x_i-)$, а в правом—совпадает со значением $S_{n_k}(x)$. В случае б) поступаем анологичным образом. В остальных точках функцию $f_k(x)$ берем равной $S_{n_k}(x)$. Функция $f_k(x)$ непрерывна, совпадает с частичной суммой $\sum\limits_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(x)$ вне $B_{n_k}$, а на $B_{n_k}$ имеет место неравенство

$$|f_k(x)|\leqslant\left|\sum_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(x)\right|. \tag{27}$$

Из этого и из того, что $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(x)=0$ на $B$, следует

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(x)-f_k(x)\right)=0 \text{ для любого } x. \tag{28}$$

Учитывая (27), запишем

$$\left\{x:\lim_{k\to\infty}\sup\left|\sum_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(x)\right|\geq 1\right\}=\{x:\lim_{k\to\infty}\sup|f_k(x)|\geq 1\}. \tag{29}$$

Из (29) следует, что множество, где $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\left|\sum\limits_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(x)\right|\geq 1$, — множество типа $G_\delta$.

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и $\sum\limits_{n=1}^{n_k} a_n\chi_n(x)$ сходится к нулю на $E^c\cup B\cup F^c$ при $k\to\infty$. Покажем, что в этом случае все $a_n$ равны нулю. Обозначим

$$G=\left\{x:\lim_{k\to\infty}\sup\left|\sum_{n=1}^{n_k} a_n\chi_n(x)\right|\geq 1\right\}. \tag{30}$$

Если $G=\varnothing$, то это значит, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)$—ряд Фурье-Хаара от некоторой ограниченной функции. Поэтому частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{n_k} a_n\chi_n(x)$ ограничены равномерно, и из теоремы 4 следует, что $a_k=0$ для всех $k$.

Если $G\neq\varnothing$, то из того, что $G$ типа $G_\delta$ и $G=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$, следует существование интервала типа Хаара $I$ (т. е. $I=\left(\frac{l-1}{2^\nu}, \frac{l}{2^\nu}\right)$) и натурального числа $m$ таких, что

$$\varnothing\neq G\cap I=I\cap F_m. \tag{31}$$

Возьмем какой-нибудь интервал типа Хаара $J$, который лежит в $I$ и не пересекается с $F_m$ ($F_m$ замкнуто). Обозначим через $\chi_J(x)$ характеристическую функцию интервала $J$. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\chi_n(x)$ —ряд Фурье-Хаара функции $\chi_J(x)\cdot\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)\right]$. Тогда, начиная с некоторого места, частичные суммы $\sum\limits_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(x)$ и $\sum\limits_{n=0}^{n_k} b_n\chi_n(x)$ на $J$ совпадают, а вне $J$ $\sum\limits_{n=0}^{n_k} b_n\chi_n(x)=0$. Легко видеть также, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|b_n|^p<+\infty$. Поэтому, по теореме 4, все $b_n$ равны нулю. Получается, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ равно нулю на $J$. Но из того, что $J$—произвольный интервал, лежащий в $I$ и не пересекающийся с $F_m$, следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)=0 \text{ на } I\setminus F_m. \tag{32}$$

Обозначим через $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x)$ ряд Фурье-Хаара функции $\chi_I(x)\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)\right]$.

Легко видеть, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|^p<+\infty$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x)=0$ на $[0,1]\setminus F_m$. Из теоремы B следует, что все $c_n$ равны нулю. Но, начиная с некоторого места,

$$\sum_{n=1}^{n_k} c_n \chi_n(x)=\sum_{n=1}^{n_k} a_n \chi_n(x) \text{ при } x\in I, \tag{33}$$

это противоречит тому, что $G\cap I\neq\varnothing$. Теорема доказана.

*Доказательство* теоремы 3. Обозначим через E множество, построенное в теореме 5, когда $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с системой Уолша-Пели. Пусть $F_m$ —замкнутые множества единственности системы Уолша в смысле определения 1 и $\mu F_m\to 1$, а B—то же самое множество, что и в доказательстве теоремы 2. Покажем, что $A=E\cap\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m\right)\cap B^c$ —множество единственности для системы Уолша. Пусть $\sum\limits_{0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)=0$ вне A. Точно так же, как и в доказательстве теоремы 3, можно показать, что множество

$G=\left\{x:\ \lim\limits_{k\to\infty}\sup\left|\sum\limits_{n=0}^{k} a_n W_n(x)\right|\geqslant 1\right\}$—множество типа $G_\delta$. Допустим, $G=\varnothing$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$—ряд Фурье-Уолша-Пели от ограниченной функции. Поэтому суммы Фейера ограничены (см. [7]), и из теоремы 5 следует, что все $a_n$ равны нулю.

Предположим, $G\neq\varnothing$. Тогда существуют интервал типа Хаара и натуральное число m такое, что

$$\varnothing\neq I\cap G\subset I\cap F_m. \tag{34}$$

Пусть J—некоторый интервал типа Хаара, лежащий в I и не пересекающийся с $F_m$ ($F_m$ замкнуто). Тогда ряд Фурье-Уолша функции $\chi_J\cdot\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)\right]$, который обозначим через $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$, будет сходится к нулю на $I\cap A$ и вне I (см. [8], стр. 413). Легко видеть, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|b_n|<+\infty$, так как $\chi_J(x)$—конечная линейная комбинация из функций системы

Уолша. Суммы Фейера ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n W_n$ равномерно ограничены, так как функция $\chi_J(x)\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)\right]$ ограничена. Из теоремы 5 следует, что все $b_n$ равны нулю. Но

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x) \text{ на } J. \tag{35}$$

Из (35) и из того, что J—произвольный интервал типа Хаара, лежащий в I и не пересекающийся с $F_m$, следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x) = 0 \text{ на } I \setminus F_m. \tag{36}$$

Рассмотрим ряд Фурье-Уолша функции $\chi_I(x)\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)\right]$, который обозначим через $\sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(x)$. Рассуждая так, как и выше, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(x) = 0 \text{ на } I. \tag{37}$$

Но это противоречит тому, что $I \cap G$ не пусто. Этим теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность член-корр. АН Арм. ССР А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

*Кафедра теории вероятностей и математической статистики* *Поступила 23.04.1981*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Golzani L.**, Boll. U. M. I., (5), 16-B, 1134—1143, 1979.
2. **Геворкян Г. Г.**, ДАН Арм. ССР., LXXII, № 4, 1981.
3. **Michele L., Sardi P. M.**, Boll. U. M. I. (4), 11, 64—65, 1975.
4. **Алексич Г.**, Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., 1963.
5. **Талалян А. А.**, Представление измеримых функций рядами, УМН, т. XV, вып. 5 (95), 77—141, 1960.
6. **Натансон И. П.**, Теория функций вещественной переменной, М., 1957.
7. **Morgenthaler G.**, Walsh-Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., 84, № 2, 472—507, 1957.
8. **Fine N. J.**, On Walsh functions, Trans. Amer. Math. Soc., 65, 372—414, 1949.

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

# ՈՐՈՇ ԼՐԻՎ ՕՐԹՈՆՈՐՄԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՎ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

## Ամփոփում

*Աշխատանքում ապացուցված է որոշ լրիվ օրթոնորմալ համակարգերով գրված շարքերի համար* $L_p$, $p<2$ *դասերի նկատմամբ լրիվ չափի միակության բազմությունների գոյությունը (մասնավորապես Հաարի և Ուոլշի համակարգերի համար)։*