ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 1979 Естественные науки

Математика

Э. О. НАЗАРЯН

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ КОНФОРМНЫХ НА ПРЕДАНАЛИТИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЯХ

В настоящей работе рассматриваются гладкие отображения, дифференциалы которых сохраняют окружности на тех плоскостях, образы которых суть аналитические прямые. Построен в замкнутой форме класс отображений, являющихся локально обратными для отображений конформных на аналитических прямых (см. [1, 2]).

Построен пример подобного однозначного (но не взаимооднозначного) отображения биголоморфно неэквивалентных областей.

СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим линейное отображение

$$w = Az + B\bar{z} \tag{1}$$

пространства C_z^n на пространство C_n^n, удовлетворяющее условию

$$\det\begin{vmatrix} A, & B \\ \bar{B}, & \bar{A} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Определение 1. R-двумерная плоскость $z = ut + v\bar{t}$ называется преданалитической, если ее образ при отображении (1) есть аналитическая прямая.

Определение 2. Линейное отображение (1) называется конформным на преданалитических плоскостях, если оно сохраняет окружности, лежащие на этих плоскостях.

Справедлива (см. [3]) следующая

Лемма. Для того чтобы отображение (1) было конформным на преданалитических плоскостях, необходимо и достаточно, чтобы

$$BA' = \psi, \tag{3}$$

где ψ—некоторая кососимметрическая матрица.

Пусть $\mathrm{Rang}A = k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, и для определенности предположим, что k—минор,

$$A\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0,$$

Обозначим через A_1, A_2 и B_1, B_2 блоки матриц A и B размерностей (n, k), $(n, n-k)$.

Из условий (2) и (3) путем преобразования матрицы

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ \bar{B}, & \bar{A} \end{vmatrix}$$

получаем, что

$$\mathrm{Rang}\,|A_1, B_2| = n, \tag{4}$$

и тогда условие (3) можно написать в эквивалентном ему виде

$$|B_1, A_2| = |A_1, B_2|\,\Phi, \tag{5}$$

где Φ—некоторая кососимметрическая матрица.

ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, КОНФОРМНЫЕ НА ПРЕДАНАЛИТИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЯХ

Определение 3. Отображение

$$T:\ w = w(z, \bar{z}),\ D \to D^*, \tag{6}$$

где D—открытое множество в пространстве C_z^n, D^*—в пространстве C_w^n, называется конформным на преданалитических плоскостях множества D, если

1) $T \in C^1(D)$,

2) в каждой точке $z \in D$ линейное отображение dT конформно на преданалитических плоскостях.

Из этого определеиия и леммы следует, что гладкая вектор-функция (6) в том и только в том случае определяет отображение конформное на преданалитических плоскостях, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Phi(\zeta, \bar{\zeta}). \tag{7}$$

Здесь Φ—некоторая кососимметрическая матрица $\Phi(\zeta, \bar{\zeta}) \in \overset{0}{C}(D)$, $\frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}}$ и $\frac{\partial w}{\partial \zeta}$—матрицы, состоящие из производных $\frac{\partial w_i}{\partial \zeta_j}$ и $\frac{\partial w_i}{\partial \bar{\zeta}_j}$, $i, j = 1, \dots, n$; $(\zeta_1, \dots, \zeta_k, \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n) = (z_1, \dots, z_k, \bar{z}_{k+1}, \dots \bar{z}_n)$.

Если обозначим через A и B значения матриц $\frac{\partial w}{\partial z}$ и $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ в некоторой фиксированной точке $z \in D$, мы получим в качестве dT отображение (1). Тогда (7) сведется к соотношению (5), и согласно условию (2) отображение конформное на преданалитических плоскостях диффеоморфно в некоторой окрестности каждой точки $z \in D$.

Далее, как это делается в работе [3], из условий интегрируемости системы (7), в силу кососимметричности матрицы Ф, получаем, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}=\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\Phi(\zeta,\bar\zeta), \tag{8}$$

где φ—произвольный элемент матрицы Ф, $\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_n}\right)$.

Остается заметить, что решение системы (8) голоморфно от

$$\eta=\zeta+\Phi\bar\zeta, \tag{9}$$

и тогда дифференцированием (9) по η получаем

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\bar\eta}+\Phi\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar\eta}=0. \tag{10}$$

Допустим теперь, что функции w_p ($p=1, \ldots, n$) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (7), тогда они будут голоморфными функциями от η.

Действительно, имеем, что

$$\frac{\partial w}{\partial\bar\eta}=\frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\bar\eta}+\frac{\partial w}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar\eta}=\frac{\partial w}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\bar\eta}+\Phi\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar\eta}\right),$$

и наше утверждение получается из (10).

Итак, доказана

Теорема 1. Конформное на преданалитических плоскостях отображение $T\in C^2(D)$ открытого множества $D\subset C^n_z$ всегда может быть представлено в виде

$$w_p=w_p(\zeta+\Phi\bar\zeta),\ p=1,\ \ldots,\ n. \tag{11}$$

Здесь Ф—кососимметрическая матрица, и $\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}=0$, где $\eta=\zeta+\Phi\bar\zeta$ $(\zeta_1,\ldots,\zeta_k,\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n)=(z_1\ldots,z_k,\bar z_{k+1},\ldots,\bar z_n)$; к—ранг матрицы при голоморфной части.

Прямым вычислением доказывается обратная

Теорема 2. Если отображение

$T:\ w=w(z,\bar z),\ D\to D^*$,

где D—открытое множество в пространстве C^n_z, обладает следующими свойствами:

1) $T\in C^1(D)$,

2) T может быть представлено в виде (11),

3) $\det\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|\neq0$ всюду на открытом множестве D,

то T—конформное на преданалитических плоскостях открытого множества D.

ПРИМЕР ОТОБРАЖЕНИЯ КОНФОРМНОГО НА ПРЕДАНАЛИТИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЯХ

Отображение

$$w_1=\left(\frac{z_1}{1-\bar{z}_2}\right)^2,\quad w_2=\frac{z_2-|z_1|^2-|z_2|^2}{z_1} \tag{12}$$

конформно на преданалитических плоскостях в гипершаре $\{|z_1|^2+|z_2|^2<1\}$ и однозначно (но не взаимооднозначно) отображает его на область $|w_1||w_2|^2<1$.

Доказательство. Отображение (12) получается, если взять

$$(\zeta_1, \zeta_2)=(z_1, z_2),\ w_1=\eta_1^2,\ w_2=\eta_2,$$

где $\eta_1=z_1+\varphi\bar{z}_2$, $\eta_2=z_2-\varphi\bar{z}_1$, φ—определяется из уравнения $\varphi=z_1+\varphi\bar{z}_2$.

Вычисление показывает, что

$$\det\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|=\frac{2}{1-\bar{z}_2}\neq 0$$

в единичном гипершаре и в силу теоремы 2 отображение (12) конформно на преданалитических плоскостях в этом гипершаре.

Далее, имеем, что

$$|w_1||w_2|^2=\frac{|z_2-|z_1|^2-|z_2|^2|}{|1-\bar{z}_2|^2}<1, \tag{13}$$

если $|z_1|^2+|z_2|^2<1$. Отображение обратное к (12) вычисляется по формуле

$$z_1=\frac{\sqrt{w_1}-\bar{w}_2|w_1|}{1+|w_1|},\quad z_2=\frac{w_2\sqrt{w_1}+|w_1|}{1+|w_1|}. \tag{14}$$

Легко показать также, что

$$|z_1|^2+|z_2|^2<1, \tag{15}$$

если $|w_1|\,|w_2|^2<1$.

Из (13), (14), (15) следует справедливость нашего утверждения.

Кафедра высшей математики *Поступила 14.03.1977*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шматков А. А.**, Изв. АН Арм. ССР, Математика, III, № 6, 1968.
2. **Назарян Э. О.**, Изв. АН Арм. ССР, Математика, VI, № 6, 1971.
3. **Назарян Э. О.**, Уч. записки ЕГУ, № 3, 1977.

Է. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

ՆԱԽԱԱՆԱԼԻՏԻԿ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ԿՈՆՖՈՐՄ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են այնպիսի հարթ արտապատկերումներ, որոնց դիֆերենցիալները կոնֆորմ են այն հարթությունների վրա, որոնց պատկերները անալիտիկ ուղիղներն են։ Փակ տեսքով կառուցված է արտապատկերումների դասը, որոնք կոնֆորմ են անալիտիկ ուղիղների վրա։ Կառուցված է այդ դասին պատկանող բիհոլոմորֆ ոչ համարժեք տիրույթների արտապատկերման օրինակ։