

УДК 62-50

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ  
ПО КОМБИНИРОВАННОМУ КРИТЕРИЮ**

**Аветисян В.В.**

**Ключевые слова:** Оптимальное управление, кривая переключения, синтез оптимального управления, электромеханическая система, комбинированный функционал

**Ավետիսյան Վ.Վ.**

**Էլեկտրամեխանիկական համակարգի օպտիմալ ղեկավարումն ըստ կոմբինացված ցուցանիշի**

**Հիմնաբառեր:** Օպտիմալ ղեկավարում, փոխանցման կոր, օպտիմալ ղեկավարման սինթեզ, էլեկտրամեխանիկական համակարգ, կոմբինացված ֆունկցիոնալ:

Դիտարկվում է ազատության մեկ աստիճանով էլեկտրամեխանիկական համակարգի օպտիմալ ղեկավարման կառուցման խնդիրը: Որպես օպտիմալության ցուցանիշ դիտարկվում է ֆունկցիոնալ, որը հաշվի է առնում ինչպես էլեկտրաշարժիչի կողմից ստեղծած պտտման մոմենտի իմպուլսը, այնպես էլ ղեկավարման պրոցեսի ժամանակը: Մաքսիմումի սկզբունքի մեթոդով կառուցվել է օպտիմալ ղեկավարում սինթեզի տեսքով, որն ապահովում է համակարգի տեղափոխումը ցանկացած սկզբնական վիճակից տրված վերջնական հանգստ վիճակ և այդ ընթացքում նվազագույն արժեք է ստանում կոմբինացված ֆունկցիոնալը: Համակարգի փուլային հարթության մեջ կառուցվել են կորեր, որոնցով առաջացած տիրույթներից, կախված թե որին է պատկանում սկզբնական վիճակը, համակարգի օպտիմալ տեղափոխումը կոորդինատների սկզբնակետ իրագործվում է ինչպես առանց փոխանցման, այնպես էլ մեկ և երկու փոխանցման պահերով ղեկավարման ռեժիմներով: Ստացվել են օպտիմալ ղեկավարման փոխանցման պահերի և ղեկավարման պրոցեսի օպտիմալ ժամանակի հաշվարկման բանաձևերը:

**Avetisyan V.V.**

**Optimal control of the electromechanical system according to the combined criterion**

**Keywords:** optimal control, switching curve, optimal control synthesis, electromechanical system, combined functional.

The problem of optimal control of the electromechanical system with one degree of freedom is under consideration. As an optimal indicator, a functionality is considered, which takes into account both the impulse momentum generated by the electric motor and the time of the control process. The optimal control synthesis was built by the method of maximum principle, which ensures the transfer the system from any initial state to the final state and during this time the minimal value receives the combined functional. The curves have been constructed on the phase plane of the system, which create different domains of initial states. The optimal transfer to the initial coordinate system is carried out both without transfer and with one or two transfer times. The optimal transfer to the initial coordinate system is carried out both without transfer and with one or two transfer times. It is depending on which domain where located the initial state. Optimal control transfer moments and optimal time counting resolutions of the control process have been obtained.

Рассматривается задача построения оптимального управления электромеханической системой с одной степенью свободы. В качестве критерия оптимальности рассмотрен функционал, учитывающий как импульс вращающего момента, создаваемого электродвигателем, так и время процесса управления. Методом принципа максимума построено оптимальное управление в виде синтеза, который обеспечивает перемещение системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя и,

при этом, минимальное значение получает комбинированный функционал. В фазовой плоскости системы построены кривые, которые образуют области, из которых, в зависимости, в какой области находится начальное состояние, приведение управляемой системы в начало координат происходит в режиме оптимального управления без переключения или с одной или двумя моментами переключения. Получены формулы для вычисления моментов переключения оптимального управления и оптимального времени процесс управления.

**Введение.** Рассматривается электромеханическая система второго порядка, которая приближённо описывает динамику отдельного звена руки многозвенного манипулятора, если каждое звено управляется напряжением, подаваемым электродвигателем независимого привода, а динамическое взаимовлияние различных степеней свободы достаточно мало [1]. Для рассматриваемой модели манипулятора в [1] изучены задачи построения оптимального управления при различных критериях качества (время перемещения, потребляемая энергия, точность позиционирования), обеспечивающего перемещение системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя, в том числе, при дополнительных ограничениях. Для различных систем, которые представляют модели механических и электромеханических систем, содержащих электрический двигатель, при различных ограничениях на управление, в том числе, и смешанных, в [2-4] исследованы задачи построения ограниченного управления, приводящие систему из произвольного начального состояния в заданное терминальное состояние, в том числе, состояние покоя за конечное время. В настоящей статье в качестве критерия оптимальности рассмотрен функционал, учитывающий как импульс, переданный механической части системы управляющим напряжением посредством редуктора электропривода, так и время процесса управления. Задача оптимального управления с таким функционалом относится к классу задач минимизации расхода топлива или ресурсов [5-9]. Используя схему построения оптимального управления методом принципа максимума [10], построено оптимальное управление в виде синтеза, который обеспечивает приведение системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя и доставляет минимум комбинированному функционалу. При этом, построены кривые, которые в фазовой плоскости системы образуют области, из которых, в зависимости в какой области находится начальное состояние, приведение управляемой системы в конечное состояние покоя происходит в режиме оптимального управления различной структуры: с двумя, одним или без переключения.

**1. Расчётная модель электромеханической системы с одной степенью свободы и постановка задачи.** Рассмотрим электромеханическую систему, состоящую из электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, редуктора и абсолютно твёрдого тела (инерционной нагрузки) на его выходном валу. Такую систему можно трактовать как модель простейшего манипулятора с одной степенью свободы. В этом случае инерционная нагрузка есть рука манипулятора вместе с грузом, закреплённым в его схвате. Движение описанной электромеханической системы определяется следующими соотношениями [1]:

$$(I + Jn^2)\ddot{\varphi} = nv, \quad (1.1)$$

$$v = kj, \quad (1.2)$$

$$Rj + kn\dot{\varphi} = u, \quad (1.3)$$

$$|u| \leq u_0. \quad (1.4)$$

В (1.1)–(1.4)  $\varphi$  – угол поворота руки;  $I$  – момент инерции вместе с ведомой шестерней редуктора;  $J$  – момент инерции якоря электродвигателя вместе с ведомой шестерней редуктора;  $n$  – передаточное число редуктора;  $v$  – момент электромагнитных сил, создаваемый двигателем и приложенных к его ротору;  $u$  – входное (управляющее) напряжение двигателя;  $j$  – ток в цепи его якоря,  $R$  – электрическое сопротивление обмотки якоря;  $k$  – коэффициент пропорциональности;  $u_0$  – максимально допустимые по модулю значения напряжения и тока в цепи якоря двигателя, соответственно. Моменты инерции  $I, J$  берутся относительно осей вращения соответствующих тел. Уравнение (1.1) описывает динамику механической части системы, равенство (1.2) отражает пропорциональность крутящего момента двигателя и тока в цепи его якоря (1.3) есть уравнение баланса напряжений в цепи якоря электродвигателя, если пренебречь явлением самоиндукции в обмотке якоря. Пренебрежение явлением самоиндукции при описании динамики манипулятора возможно, если электромагнитная постоянная времени  $\tau = L/R$  ( $L$  – индуктивность обмотки якоря) много меньше времени рабочей операции манипулятора. На практике это условие в большинстве случаев выполняется. Отметим, что система уравнений (1.1)–(1.3) приближённо описывает динамику отдельного звена руки многозвенного манипулятора, если каждое звено управляется независимым приводом, а динамическое взаимовлияние различных степеней свободы достаточно мало (см. [1]).

Так как момент электромагнитных сил  $v$  при помощи редуктора электропривода создаёт момент сил  $nv$ , под действием которого ведомая шестерня, а значит, и жёстко связанная с ним рука манипулятора вращается относительно неподвижной оси, то величина

$$M = \int_0^T n|v(t)| dt \quad (1.5)$$

определяет импульс вращающего момента за время  $T$  переданной механической части (1.1) рассматриваемой электромеханической системы.

Исключим переменную  $j$  из совокупности уравнения (1.3) с помощью (1.2) и в (1.1)–(1.5) перейдём к безразмерным единицам (с последующим опусканием штрихов)

$$t' = t/\bar{T}, \quad u' = u/u_0, \quad v' = vn\bar{T}^2/A, \quad k' = kn/(u_0\bar{T}), \quad (1.6)$$

$$R' = RA/(knu_0\bar{T}^2), \quad M' = M\bar{T}/A,$$

где  $A = I + Jn^2$ , а  $\bar{T} = nk/u_0$  – единица измерения времени. Тогда, динамику манипулятора (1.1)–(1.3), ограничение на напряжение (1.4) и функционал (1.5) можно описать следующей системой:

$$\ddot{\varphi} = v, \quad Rv + k\dot{\varphi} = u, \quad (1.7)$$

$$|u| \leq 1, \quad (1.8)$$

$$M = \int_0^T |v(t)| dt. \quad (1.9)$$

Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1.7), (1.8) с функционалом, учитывающим (1.9).

**Задача.** Найти закон изменения ограниченного (1.8) управляющего напряжения  $u^*(\varphi, \dot{\varphi})$  в виде функции угла поворота руки и её угловой скорости, который обеспечивает приведение системы (1.7) из произвольного начального состояния

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}^0 \quad (1.10)$$

в конечное состояние покоя

$$\varphi(T) = 0, \quad \dot{\varphi}(T) = 0 \quad (1.11)$$

и минимизирует функционал

$$J_1 = \int_0^T |v(t)| dt + T. \quad (1.12)$$

Функционал (1.12) – комбинированный, он учитывает как импульс вращающего момента (интегральный член), создаваемый в итоге управляющим напряжением, подаваемым на вход электродвигателя, так и время движения системы (терминальный член). Отметим, что в поставленной задаче время  $T$  не фиксируется заранее, а определяется в процессе решения.

Введём обозначения:

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \dot{\varphi}, \quad v = (u - k\varphi_2)R^{-1} \quad (1.13)$$

и запишем задачу (1.7), (1.8), (1.10)–(1.12) в следующем виде:

$$\dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = v, \quad (1.14)$$

$$v^- \leq v \leq v^+, \quad v^- = -R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2, \quad v^+ = R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2, \quad (1.15)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_1^0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2^0; \quad \varphi_1(T) = 0, \quad \varphi_2(T) = 0, \quad (1.16)$$

$$J_1 = \int_0^T |v(t)| dt + T \rightarrow \min. \quad (1.17)$$

**2. Нахождение оптимальных режимов управления.** Для решения задачи (1.14)–(1.17) будем использовать принцип максимума [10]. Гамильтониан системы (1.14)–(1.17) имеет вид

$$H = -1 - |v| + p_1\varphi_2 + p_2v, \quad (2.1)$$

где  $p_1, p_2$  – сопряжённые переменные, определяемые из сопряжённых уравнений

$$\dot{p}_1 = -H'_{x_1} = 0, \quad \dot{p}_2 = -H'_{x_2} = -p_1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2)$$

$$p_1(t) = c_1, \quad p_2(t) = -c_1t + c_2, \quad c_{1,2} = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Максимизация функции  $H$  по управлению  $v$  при ограничении (1.15) приводит к решению следующей экстремальной задачи:

$$-|v| + p_2v \rightarrow \max_{v^- \leq v \leq v^+}, \quad v^- = -R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2, \quad v^+ = R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2. \quad (2.4)$$

Максимум в (2.4) достигается, когда

$$v^* = \begin{cases} v^+ = R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2, & p_2(t) > 1, \quad t \in [0, T], \\ 0, & |p_2(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T], \\ v^- = -R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2, & p_2(t) < -1, \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.5)$$

и при этом, согласно принципу максимума [10], в конечный момент  $t = T$  должно выполняться условие трансверсальности Гамильтониана:

$$H(T) = -1 - |v^*(T)| + p_1(T)\varphi_2(T) + p_2(T)v^*(T) = 0. \quad (2.6)$$

Отсюда, учитывая конечное условие  $\varphi_2(T) = 0$  (1.16), получим

$$-1 - |v^*(T)| + p_2(T)v^*(T) = 0. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что случай  $v^*(T) = 0$  невозможен, т.е.  $v^*(T) = v^+ = R^{-1}$  или  $v^*(T) = v^- = -R^{-1}$ . В первом случае из (2.7) получим  $p_2(T) = 1 + R$ , а во втором случае:  $p_2(T) = -1 - R$ . В соответствии с этим в зависимости от параметров  $c_1, c_2$  возможны следующие случаи поведения линейной функции  $p_2(t)$  на интервале  $[0, T]$  ( $p_2(t)$  тождественно не равна нулю, так как в противном случае нарушается условие трансверсальности (2.7)):

$$\begin{aligned} (1) & \{p_2(t) > 1, \quad t \in [0, T]\}, \\ (2) & \{p_2(t) < -1, \quad t \in [0, T]\}, \\ (3) & \{-1 \leq p_2(t) \leq 1, \quad t \in [0, t_1]; \quad p_2(t) > 1, \quad t \in (t_1, T]\}, \\ (4) & \{1 \geq p_2(t) \geq -1, \quad t \in [0, t_1], \quad p_2(t) < -1, \quad t \in (t_1, T]\}, \\ (5) & \{p_2(t) > 1, \quad t \in [0, t_1), \quad 1 \geq p_2(t) \geq -1, \quad t \in [t_1, t_2], \quad -1 > p_2(t), \quad t \in (t_2, T]\}, \\ (6) & \{p_2(t) < -1, \quad t \in [0, t_1), \quad -1 \leq p_2(t) \leq 1, \quad t \in [t_1, t_2], \quad p_2(t) > 1, \quad t \in (t_2, T]\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что линейная функция  $p_2(t)$  на интервале  $[0, T]$  может принимать значения  $+1$  и  $-1$  не более чем в двух точках. Поэтому, оптимальное управление (2.5) имеет не более двух точек переключения и в соответствии с каждым из случаев (2.8) имеет следующие структуры:

$$\begin{aligned} (1) & \quad v^*(t) = \{v^+, \quad t \in [0, T]\}, \\ (2) & \quad v^*(t) = \{v^-, \quad t \in [0, T]\}, \\ (3) & \quad v^*(t) = \{0, \quad t \in [0, t_1]; \quad v^+, \quad t \in [t_1, T]\}, \\ (4) & \quad v^*(t) = \{0, \quad t \in [0, t_1]; \quad v^-, \quad t \in [t_1, T]\}, \\ (5) & \quad v^*(t) = \{v^+, \quad t \in [0, t_1]; \quad 0, \quad t \in [t_1, t_2]; \quad v^-, \quad t \in [t_2, T]\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$(6) \ v^*(t) = \{v^-, t \in [0, t_1]; \ 0, \ t \in [t_1, t_2]; \ v^+, t \in [t_2, T]\}.$$

В (2.9) режимы (1), (2) – управления без переключения, режимы (3), (4) – управления с одним, а (5), (6) – с двумя переключениями.

Таким образом, для заданного начального состояния  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$  оптимальный режим управления  $v^*$ , приводящего систему (1.14) в конечное состояние покоя (1.16), может иметь только один из указанных видов (2.9)(1)-(6).

Для определения искомого режима управления в зависимости от начального состояния  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ , найдём траектории фазовых траекторий соответствующих значениям  $v^* = v^+, v^-, 0$ .

Введём обозначение  $v^*(\theta) = \theta R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2$ , где  $\theta = \pm 1$ . Тогда  $v^*(\theta) = v^+ = R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2$ , если  $\theta = +1$  и  $v^*(\theta) = v^- = -R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2$ , если  $\theta = -1$ .

Интегрируем систему (1.14) с начальным условием (1.16) при управлении  $v^*(\theta)$ :

$$\varphi_1 = \theta k^{-1}t + Rk^{-1}(\theta k^{-1} - \varphi_2^0)[\exp(-kR^{-1}t) - 1] + \varphi_1^0, \quad (2.10)$$

$$\varphi_2 = \theta k^{-1} - (\theta k^{-1} - \varphi_2^0)\exp(-kR^{-1}t)$$

и исключая время  $t$  из выражений (2.10), получим уравнение фазовых траекторий

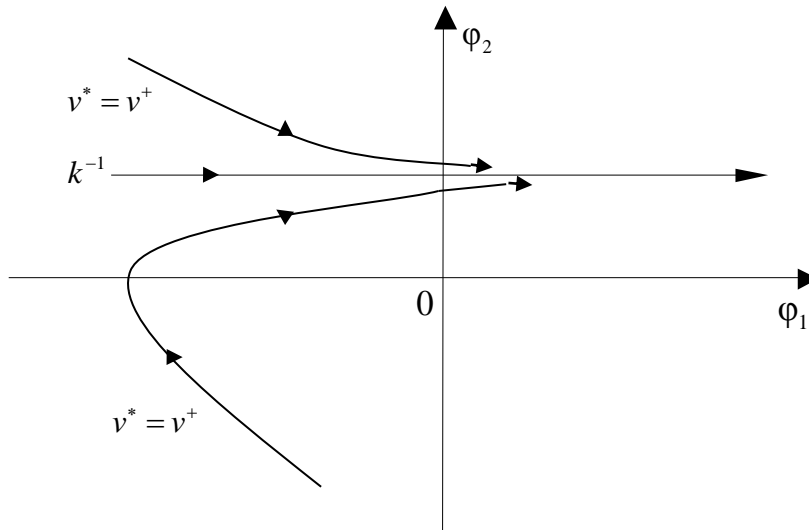
$$\varphi_1 = x_1^0 - \theta Rk^{-2} \ln[(\theta - k\varphi_2)(\theta - k\varphi_2^0)^{-1}] + Rk^{-1}(\varphi_2^0 - \varphi_2). \quad (2.11)$$

Так как уравнение (2.11) инвариантно относительно следующих замен фазовых переменных и параметров:  $\theta \rightarrow -\theta$ ,  $\varphi_{1,2}^0 \rightarrow -\varphi_{1,2}^0$ ,  $\varphi_{1,2} \rightarrow -\varphi_{1,2}$ , то семейства фазовых траекторий, отвечающих значениям  $\theta = +1$  и  $\theta = -1$ , или что то же, управлениям  $v^* = v^+$  и  $v^* = v^-$ , симметричны относительно начало координат. Поэтому достаточно указать свойства кривой  $\varphi_1(\varphi_2)$  (2.11) при  $v^* = v^+$  [1]: 1) когда  $\varphi_2$  растёт от  $-\infty$  до 0, то  $\varphi_1$  убывает от  $\infty$  до 0 и достигает нулевого минимума при  $\varphi_2 = 0$ ; 2) в интервале  $\varphi_2 \in (0, k^{-1})$  величина  $\varphi_1$  растёт от 0 до  $\infty$ , а в интервале  $\varphi_2 \in (k^{-1}, \infty)$  величина  $\varphi_1$  убывает от  $\infty$  до  $-\infty$ . Таким образом, кривая  $\varphi_1(\varphi_2)$  состоит из двух ветвей, приближающихся к асимптоте  $\varphi_2 = k^{-1}$ . Эта асимптота согласно (2.10) также является фазовой траекторией уравнения (1.14) при  $v^* = v^+$  и  $\varphi_2^0 = k^{-1}$ , отвечающей движению системы с постоянной скоростью. На фиг.1 изображены фазовые кривые уравнения (1.14), отвечающие значению  $v^* = v^+$ . Стрелками показано направление движения изображающей точки.

Интегрируя (1.14) с начальным условием (1.16) при управлении  $v^* = 0$ , найдём  $\varphi_1(t) = \varphi_2^0 t + \varphi_1^0$ ,  $\varphi_2(t) = \varphi_2^0$ , (2.12)

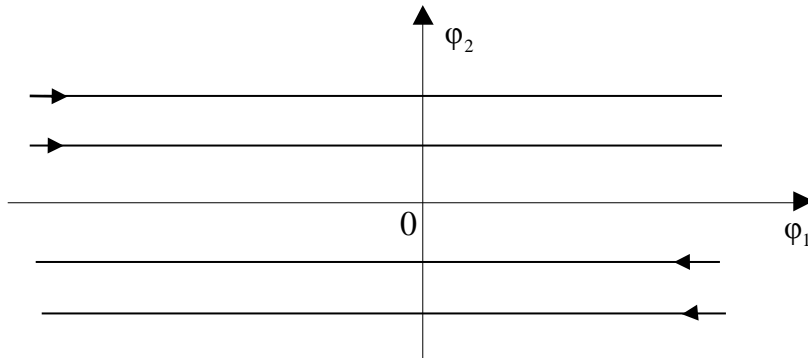
откуда получим уравнение фазовой траектории в виде

$$\Phi_2 = \Phi_2^0. \quad (2.13)$$



Фиг.1

На фиг.2 изображены фазовые линии уравнения (1.14), отвечающие значению  $v^* = 0$ . Стрелками показано направление движения изображающей точки. При этом, направление движения положительно, если  $\Phi_2^0 > 0$  и отрицательно, если  $\Phi_2^0 < 0$ .



Фиг. 2

**3. Построение синтеза оптимального управления.** На фазовой плоскости найдём геометрическое место начальных состояний  $(\Phi_1^0, \Phi_2^0)$ , из которых в начало координат система (1.14) приводится с помощью режимов управления (2.9), (1)–(6).

Рассмотрим режим управления (2.9),(5):  $\{v^+, 0, v^-\}$ .

Интегрирование системы (1.14) с начальным условием (1.16) при управлении

$v^* = v^+ = R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2$  на интервале  $0 \leq t \leq t_1$  даётся формулой (2.10), в которой следует положить  $\theta = 1$ :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= k^{-1}t + Rk^{-1}(k^{-1} - \varphi_2^0)[\exp(-kR^{-1}t) - 1] + \varphi_1^0, \\ \varphi_2 &= k^{-1} - (k^{-1} - \varphi_2^0)\exp(-kR^{-1}t).\end{aligned}\quad (3.1)$$

При  $t = t_1$  из (3.1) получаем конечное состояние  $(\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)})$  на первом участке управления (2.9), (5):

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(1)} &= \varphi_1(t_1) = k^{-1}t_1 + Rk^{-1}(k^{-1} - \varphi_2^0)[\exp(-kR^{-1}t_1) - 1] + \varphi_1^0, \\ \varphi_2^{(1)} &= \varphi_2(t_1) = k^{-1} - (k^{-1} - \varphi_2^0)\exp(-kR^{-1}t_1),\end{aligned}\quad (3.2)$$

которое служит начальным состоянием для второго участка. При  $v^* = 0$ , на интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$  имеем:

$$\varphi_1(t) = \varphi_2^{(1)}(t - t_1) + \varphi_1^{(1)}, \quad \varphi_2(t) = \varphi_2^{(1)}.\quad (3.3)$$

В момент  $t = t_2$  получаем конечное состояние  $(\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)})$  системы на втором участке управления (2.9), (5):

$$\varphi_1(t_2) = \varphi_1^{(2)} = \varphi_2^{(1)}(t_2 - t_1) + \varphi_1^{(1)}, \quad \varphi_2(t_2) = \varphi_2^{(2)} = \varphi_2^{(1)}.\quad (3.4)$$

Состояние (3.4) служит начальным состоянием для третьего участка. При управлении  $v^* = v^- = -R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2$  на  $t_2 \leq t \leq T$  получаем

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -k^{-1}(t - t_2) - Rk^{-1}(k^{-1} + \varphi_2^{(2)})[\exp(-kR^{-1}(t - t_2)) - 1] + \varphi_1^{(2)}, \\ \varphi_2 &= -k^{-1} + (k^{-1} + \varphi_2^{(2)})\exp(-kR^{-1}(t - t_2)).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Учитывая, что конечное состояние известно, имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_1(T) &= -k^{-1}(T - t_2) - Rk^{-1}(k^{-1} + \varphi_2^{(2)})[\exp(-kR^{-1}(T - t_2)) - 1] + \varphi_1^{(2)} = 0, \\ \varphi_2(T) &= -k^{-1} + (k^{-1} + \varphi_2^{(2)})\exp(-kR^{-1}(T - t_2)) = 0.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Исключив время  $T - t_2$  из последних двух уравнений, получим:

$$\varphi_1^{(2)} = k^{-2}R \ln(1 + k\varphi_2^{(2)}) - k^{-1}R\varphi_2^{(2)}.\quad (3.7)$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что второе переключение управления происходит, если точка  $(\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)})$  принадлежит кривой  $\Gamma_2^-(\varphi_1, \varphi_2)$ , задаваемая на плоскости фазовой плоскости  $Ox_1x_2$  следующим образом:

$$\Gamma_2^-(\varphi_1, \varphi_2) = \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 = k^{-2}R \ln(1 + k\varphi_2) - k^{-1}R\varphi_2, \quad \varphi_2 \geq 0\}.\quad (3.8)$$

При режиме управления (2.9), (5), линейная функция  $p_2(t) = -c_1t + c_2$  (2.3), согласно (2.8), принимает значение 1 при  $t = t_1$ :  $p_2(t_1) = -c_1t_1 + c_2 = 1$  и значение  $-1$  при  $t = t_2$ :  $p_2(t_2) = -c_1t_2 + c_2 = -1$ . Следовательно, она имеет вид

$$p_2(t) = (t_2 + t_1 - 2t)(t_2 - t_1)^{-1}.\quad (3.9)$$



В конечный момент времени  $t = T$ , учитывая, что  $v^*(T) = v^-$  (2.9)(5) и  $\varphi_2(T) = 0$  (1.16), из условия трансверсальности (2.6) имеем  $-1 - R^{-1} - R^{-1}p_2(T) = 0$ . Из этого соотношения с учётом (3.9) получаем равенство  $p_2(T) = (t_2 + t_1 - 2T)(t_2 - t_1)^{-1} = -1 - R$ , откуда находим  $T = t_2(1 + R/2) - t_1R/2$ . (3.10)

Выразим теперь  $\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}$  через  $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}$ . Из (3.4), (3.7) исключим  $\varphi_1^{(2)}$  и  $\varphi_2^{(2)}$ :  $\varphi_2^{(1)}(t_2 - t_1) + \varphi_1^{(1)} = k^{-2}R \ln(1 + k\varphi_2^{(1)}) - k^{-1}R\varphi_2^{(1)}$ . (3.11)

Далее, из (3.2), (3.6), (3.10) определим  $t_1, t_2, T$

$$\begin{aligned} t_1 &= k^{-1}R \ln \left[ (1 - k\varphi_2^0)(1 - k\varphi_2^{(1)})^{-1} \right], \\ t_2 &= k^{-1}R \ln \left[ (1 - k\varphi_2^0)(1 - k\varphi_2^{(1)})^{-1} \right] + 2k^{-1} \ln(1 + k\varphi_2^{(1)}), \\ T &= k^{-1}R \ln \left[ (1 - k\varphi_2^0)(1 - k\varphi_2^{(1)})^{-1} \right] + (2 + R)k^{-1} \ln(1 + k\varphi_2^{(1)}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

а из (3.11), используя (3.12), найдём зависимость  $\varphi_1^{(1)}$  от  $\varphi_2^{(1)}$

$$\varphi_1^{(1)} = k^{-1}(k^{-1}R - 2\varphi_2^{(1)}) \ln(1 + k\varphi_2^{(1)}) - k^{-1}R\varphi_2^{(1)}. \quad (3.13)$$

Если зададим кривую  $\Gamma_1^-(x_1, x_2)$  с помощью уравнения (3.13)

$$\Gamma_1^- = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 = k^{-1}(k^{-1}R - 2\varphi_2) \ln(1 + k\varphi_2) - k^{-1}R\varphi_2, \varphi_2 \geq 0 \right\}, \quad (3.14)$$

то состояние  $(\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}) \in \Gamma_1^-$ .

Пусть начальное состояние  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$  переводится в начало координат управляющей последовательностью  $v = \{v^-, 0, v^+\}$ . Тогда геометрическое место точек, соответствующих моменту переключения  $t_1$ , будет задаваться кривой

$$\Gamma_1^+ = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 = -k^{-1}(k^{-1}R + 2\varphi_2) \ln(1 - k\varphi_2) - k^{-1}R\varphi_2, \varphi_2 \leq 0 \right\}, \quad (3.15)$$

а геометрическое место точек, соответствующих моменту переключения  $t_2$  – кривой

$$\Gamma_2^+ = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 = -k^{-2}R \ln(1 - k\varphi_2) - k^{-1}R\varphi_2, \varphi_2 \leq 0 \right\}. \quad (3.16)$$

Тогда, кривая переключения  $\Gamma_2 = \Gamma_2^+ \cup \Gamma_2^-$  управления  $v^*$ , на которой происходит переключение управления со значения  $v^* = 0$  на значение  $v^* = v^+$  или  $v^* = v^-$  будет определяться соотношением

$$\Gamma_2 = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 = k^{-2}R \operatorname{sign}(\varphi_2) \ln[1 + k|\varphi_2|] - k^{-1}R\varphi_2 \right\}. \quad (3.17)$$

Аналогично, кривая переключения  $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$  управления  $v^*$ , на которой происходит переключение управления со значения  $v^* = v^+$  или  $v^* = v^-$  на значение

$v^* = 0$ , будет определяться соотношением

$$\Gamma_1 = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 = k^{-1} [k^{-1} R \text{sign}(\varphi_2) - 2\varphi_2] \ln(1 + k|\varphi_2|) - k^{-1} R\varphi_2 \right\}. \quad (3.18)$$

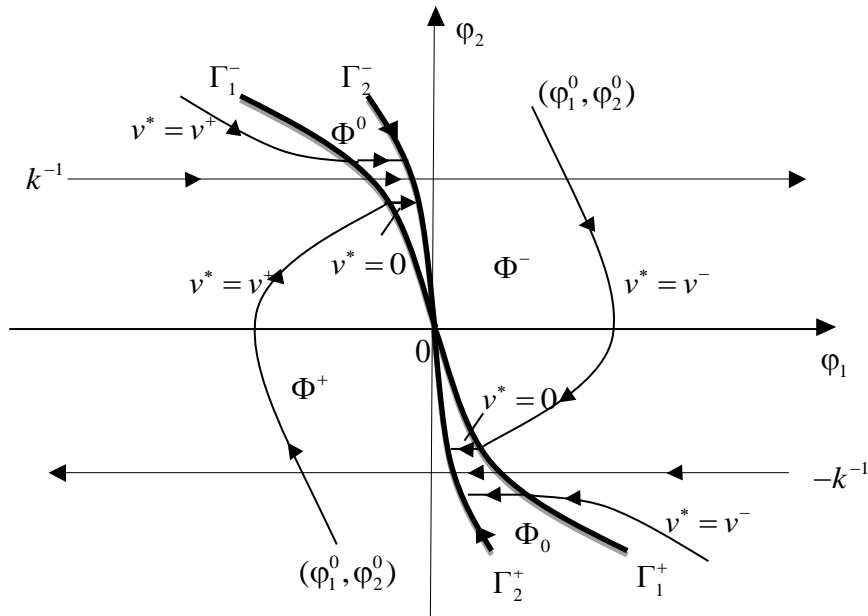
Кривая  $\Gamma_1$ , определяемая уравнением (3.18), обладает следующими свойствами: она определена для  $\varphi_2 \in (-\infty, \infty)$ ; при этом, когда  $\varphi_2$  растёт от 0 до  $\infty$ , то  $\varphi_1$  убывает от 0 до  $-\infty$ , а когда  $\varphi_2$  убывает от 0 до  $-\infty$ , то  $\varphi_1$  растёт от 0 до  $\infty$ ; кривая  $\Gamma_1$  нигде, кроме начала координат, не пересекается с кривой  $\Gamma_2$ . На фиг.3 кривые  $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$  и  $\Gamma_2 = \Gamma_2^+ \cup \Gamma_2^-$  изображены жирными линиями.

В фазовой плоскости кривые (3.17) и (3.18) образуют центрально-симметричные области  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$ , а также  $\Phi_0$  и  $\Phi^0$  (фиг. 3):

$$\begin{aligned} \Phi^+ &= \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) : \Gamma_1^- < 0, \Gamma_2^+ < 0 \right\}, & \Phi^- &= \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) : \Gamma_1^+ > 0, \Gamma_2^- > 0 \right\}, \\ \Phi^0 &= \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) : \Gamma_1^- \geq 0, \Gamma_2^- < 0 \right\}, & \Phi_0 &= \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) : \Gamma_1^+ \leq 0, \Gamma_2^+ > 0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Оптимальное управление, как функция текущих координат состояния системы (1.8), в форме синтеза, с учётом (3.19), определяется таким образом:

$$v^*(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} v^+ = R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2, & (\varphi_1, \varphi_2) \in \Phi^+ \cup \Gamma_2^+, \\ 0, & (\varphi_1, \varphi_2) \in \Phi_0 \cup \Phi^0, \\ v^- = -R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2, & (\varphi_1, \varphi_2) \in \Phi^- \cup \Gamma_2^-. \end{cases} \quad (3.20)$$



Фиг.3

На фиг.3 представлен фазовый портрет системы (1.14) при оптимальном управлении (3.20). Согласно (3.20), если  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in \Gamma_2^+$  или  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in \Gamma_2^-$ , то движение к началу координат происходит по кривым  $\Gamma_2^+$  или  $\Gamma_2^-$  при оптимальном режиме управления  $v^+ = R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2$  (2.9)(1) или  $v^- = -R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2$  (2.9)(2), соответственно. Если  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in \Phi^+$ , то движение происходит по кривой (2.11)( $\theta = 1$ ) при управлении  $v^*(\theta)|_{\theta=1} = v^+ = R^{-1} - kR^{-1}\varphi_2$  до пересечения с кривой  $\Gamma_1^-$ . В момент попадания изображающей точки системы (1.14) на кривую  $\Gamma_1^-$ , управление переключается с значения  $v^* = v^+$  на значение  $v^* = 0$  и движение происходит по горизонтальной прямой (2.13) в сторону кривой  $\Gamma_2^-$ . С попаданием на кривую  $\Gamma_2^-$ , управление переключается с значения  $v^* = 0$  на значение  $v^* = v^-$  и дальнейшее движение происходит по кривой (3.8) до прихода изображающей точки в начало координат. Если  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in \Phi^0$ , то движение изображающей точки системы (1.14) происходит по горизонтальной прямой (2.13) при управлении  $v^* = 0$  и приход в начало координат происходит по описанному выше способу.

Переходя в (3.20) к исходным обозначениям (1.13), получим решение основной задачи – оптимальное управление в виде синтеза на фазовой плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$ :  $u^*(\varphi, \dot{\varphi}) = 1$ , если  $(\varphi, \dot{\varphi}) \in \Phi^+ \cup \Gamma_2^+$ ;  $u^*(\varphi, \dot{\varphi}) = k\dot{\varphi}$ , если  $(\varphi, \dot{\varphi}) \in \Phi_0 \cup \Phi^0$ ;  $u^*(\varphi, \dot{\varphi}) = -1$ ;  $(\varphi, \dot{\varphi}) \in \Phi^- \cup \Gamma_2^-$ .

**Заключение.** В статье путём использования метода принципа максимума получено оптимальное управление в форме синтеза, позволяющего вычислить управление, обеспечивающее перемещение системы, моделирующей динамику однозвенного манипулятора, из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя и минимизирует комбинированный функционал, учитывающий импульс момента сил, вращающего звено манипулятора, и время процесса управления. Построены кривые, которые в фазовой плоскости системы образуют области, из которых в зависимости принадлежности начального состояния той или другой области, перемещение управляемой системы в конечное состояние покоя происходит в режиме управления различной структуры: с двумя, одним или без переключения. Получены формулы для вычисления моментов переключения оптимального управления и оптимального времени процесс управления.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного гранта 18Т-2С127.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Оптимальное управление электроприводами промышленных роботов. М.: ИПМ АН СССР, 1986. 71с. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Optimal control of electric drives of the industrial robots. – М.: IPM AS USSR. 1986, 71p. (in Russian)
2. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с. Chernousko F. L., Ananievski I. M., Reshmin S. A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. — 396 p.
3. Аветисян В.В. Управление электромеханическим манипулятором при ограничениях на напряжение и ток // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. № 1. С.68–74. Avetisyan V.V. The control of electromechanical manipulators with restrictions on tension and current // Mechanics. Proceedings of NAS of Armenia. 2002, Vol. 55. Issue 1, pp. 68-74. (in Russian)
4. Аветисян А.С., Аветисян В.В. О построении ограниченного управления электро-механической системой // Доклады НАН Армении. 2017. Т.117. №2. С. 121–131. Avetisyan A.S., Avetisyan V.V. On the Formulation of a Limited Control of Electro-mechanical System // Reports of NAS RA. 2017. Vol. 117, № 2, pp. 121–131.(in Russian)
5. Singh T. Fuel/Time Optimal Control of the Benchmark Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1995. Vol.18. № 6. Pp.1225–1231.
6. Hartmann R., Singh T. Fuel/Time Optimal Control of Flexible Structures: A Frequency Domain Approach // Journal of Vibration and Control. 1999. Vol.5. № 5. Pp.795– 817.
7. Naidu D.S. Optimal control systems. – CRC Press, Inc. Boca Raton, FL, USA, 2003, 464p .
8. Галяев А.А. Задача оптимального управления осциллятором с целью обнуления его энергии при ограничении на управляющее воздействие // АиТ. 2009, вып. 3, с. 24–33. Galyaev A.A. The problem of optimal control of an oscillator with the aim of zeroing its energy with restriction on the control action //Automation and Remote Control. 2009, № 3, pp.24-33.(in Russian)
9. Александров В.М. Оптимальное по расходу ресурсов управление линейными системами // Ж. вычисл. матем. и матем.-физ. 2011. Т.51. №4. С. 562–579. Aleksandrov V.M. Resource-optimal control of linear systems // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 2011. Vol. 51, №4, pp.562–579. (in Russian)
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393с. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The mathematical theory of optimal processes. – Moscow: Nauka, 1983. 393 p. (in Russian)

### Сведения об авторе:

**Аветисян Ваган Вардгесович** – д. ф.-м. н., профессор, ЕГУ, факультет математики и механики, e-mail: vavetisyan@ysu.am

Поступила в редакцию 31. 07. 2018