

Математика

С. М. МАНУКЯН

О ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ

Рассматривается задача определения параметров нелинейного движения сплошной среды при прохождении слабой ударной волны около каустики, представляющей огибающую лучей для соответствующей линейной задачи. Подробно исследуется линейное решение нестационарной задачи в полной окрестности каустики. Дается обсуждение результатов расчета падающей волны методом характеристик, выполненных ранее. Формулируется трансзвуковая задача, для которой полученное линейное решение может быть использовано в качестве граничных условий.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения нелинейного движения вблизи каустики имеют вид [1—4]

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}(y + V_x) + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad (1)$$

где система координат oxy указана на рис. 1.

Здесь точка o есть точка пересечения волны AB линейной задачи с каустикой, ось ox — касательна к каустике. В линейной задаче, вводя потенциал $\bar{\varphi}$, можем из (1) получить

$$V_x = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} \cdot y + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Линейное решение вблизи каустики методом эталонных решений получено в [5—8].

Определим более коротким путем линейное решение и най-

дем удобные формулы для $\bar{\varphi}$, V_x , V_y , $\frac{\partial V_x}{\partial x}$ в полной окрестности точки o .

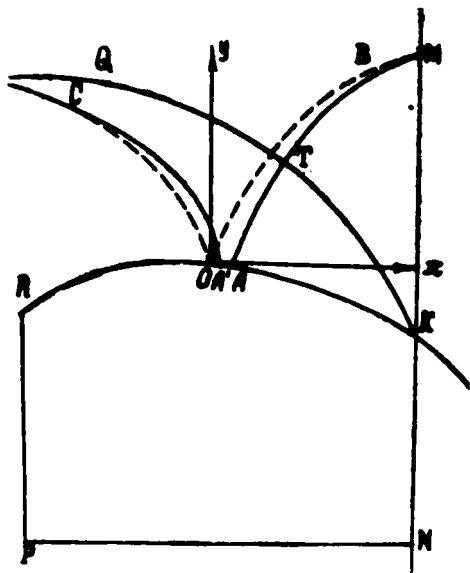


Рис. 1

Легко видеть, что решение уравнения (2) можно взять в виде периодического по x решения

$$\varphi_0 = B(\omega) e^{i\omega x} \cdot v(\omega^{2/3} y), \tag{3}$$

где $\omega = \text{const}$, $v(z)$ есть функция Эйри [7].

Используя формулы асимптотического представления функции Эйри [7] для больших отрицательных z , можем получить решение вблизи волн, но вдали от каустики в форме лучевого решения

$$\varphi_{\text{геом}} = \frac{1}{2} B(\omega) (-y)^{-\frac{1}{4}} \omega^{-\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left[e^{i\omega(x-a)} + e^{i\omega(x+a)-i\frac{\pi}{2}} \right]. \tag{4}$$

Здесь $\alpha = \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$, первое слагаемое в скобках дает падающую волну АВ, а второе — отраженную от каустики волну АС.

Суммируя (3) по ω , получим решение для нестационарной задачи

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cdot v(\omega^{2/3} y) e^{i\omega x} d\omega. \tag{5}$$

Выберем $B(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\omega^{1/6}}{(-i\omega)^{k+1}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Проведем обратное преобразование Лапласа по параметру $S = -i\omega$.

$$\frac{1}{S^{k+1}} \cdot e^{-S(x-a)} \cdot \frac{(x-a)_+^k}{\Gamma(k+1)}, \text{ где } x_+^k = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^k, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Тогда, учитывая асимптотическую формулу (4), можем показать, что указанный выбор $B(\omega)$ соответствует следующему виду падающей волны АВ:

$$\varphi_{\text{геом}} = (-y)^{-\frac{1}{4}} \frac{(x-a)_+^k}{\Gamma(k+1)}. \tag{6}$$

Таким образом, для падающей волны такого типа решение вблизи каустики имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} (-y)^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^{\frac{1}{6}} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(-i\omega)^{k+1}} \cdot v(\omega^{2/3} y) e^{i\omega x} d\omega. \tag{7}$$

Для $k=0$, т. е. для скачкообразной по $V_x = \varphi(k=0)$ волны АВ этот интеграл был вычислен в [5]. Решение записывается через сферические функции и имеет вид

$$V_x \cdot (-y)^{\frac{1}{4}} = \begin{cases} P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x}{a}\right) & \text{при } x > a \\ 2P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x}{a}\right) & \text{при } -a < x < a \\ \sqrt{3} P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{2}{\pi} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x}{a}\right) & \text{при } x < -a. \end{cases} \tag{8}$$

Для произвольного k решение находится сверткой от решения (8) и имеет вид

$$(-y)^{\frac{1}{4}} \varphi(k) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_x^{\infty} (-x+\tau)^{k-1} P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) d\tau \quad \text{при } x > \alpha; \quad (9)$$

$$(-y)^{\frac{1}{4}} \varphi(k) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_x^{\infty} (-x+\tau)^{k-1} P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) d\tau + \quad (10)$$

$$+ \frac{2}{\Gamma(k)} \int_x^{\alpha} (-x+\tau)^{k-1} P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) d\tau \quad \text{при } -\alpha < x < \alpha.$$

Вычисление этих интегралов, приведенное для газодинамической задачи в работе [8], годится для произвольной среды, и результат имеет вид

$$\varphi(k) = A_2(k) \cdot F_1(k_1) \quad \text{при } x > \alpha; \quad (11)$$

$$\varphi(k) = A_2(k) \cdot F_1(k_1) + \frac{1}{\Gamma(k+1)} (-y)^{-\frac{1}{4}} (\alpha-x)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+k, \frac{\alpha-x}{2x}\right) \quad \text{при } -\alpha < x < \alpha. \quad (12)$$

Здесь

$$A_2(k) = \frac{k}{2\pi} \cdot 2^k \cdot \Gamma^2(k) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}-k\right) \sin \pi k}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right) \sin\left(\frac{1}{6}+k\right) \pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(k+1)}, \quad (13)$$

$$F_1(k_1) = |x|^{2k_1} F\left(-k_1, -k_1 + \frac{1}{2}, -2k_1 + \frac{5}{6}, 1 - \frac{\eta^2}{x^2}\right), \quad (14)$$

где $k = 2k_1 + \frac{1}{6}$, $\eta = -y \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\xi = \frac{1-x}{2\alpha}$.

Учитывая, что из (9) и (10) следует

$$\frac{\partial \varphi(k)}{\partial x} = -\varphi(k-1), \quad (15)$$

и зная, что $V_x = \varphi(k=0)$, можем получить для потенциала $\bar{\varphi}$ и $\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2}$ следующие формулы:

$$\bar{\varphi} = -\varphi(k=1), \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = -\varphi(k=-1). \quad (16)$$

Здесь в качестве φ надо брать выражения (11), (12). Не составляет труда получение следующих формул:

$$\varphi(k=0) = (-y)^{-\frac{1}{4}} \varphi_1'(\xi) = (-y)^{-\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, \xi\right);$$

$$\varphi(k=1) = \frac{4}{3} (-y)^{\frac{5}{4}} \varphi_1(\xi), \text{ где } \varphi_1(\xi) = {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 2, \xi\right); \quad (17)$$

$$\varphi(k=-1) = \frac{3}{4} (-y)^{-\frac{7}{4}} \varphi_1''(\xi), \text{ где } \varphi_1''(\xi) = \frac{5}{36} F\left(\frac{7}{6}, \frac{11}{6}, 2, \xi\right).$$

Кроме этого, можно показать, что в (12) при $k=0, 1, -1$ имеет место совпадение второго и первого слагаемых правой части, т. е.

$$\varphi(k) = 2A_3(k)F_1(k_1) \text{ при } -\alpha < x < \alpha. \quad (12')$$

Решение (11), (12') имеет место около волны АВ, т. е. в области I рис. 2. Для получения решения в остальных областях рис. 2 следует сделать переход от решения (12') позади АВ по путям I—II—III и от решения (11) по путям I—VII—VI—V—IV (рис. 2), как указано в [2]. Тогда получится решение в областях VII, V, III, IV, приведенное в работе [2]. Остается найти решение в областях II и VI, где $\left|\frac{x}{\alpha}\right| < 1$, причем в II $y < 0$, а в VI $-y > 0$.

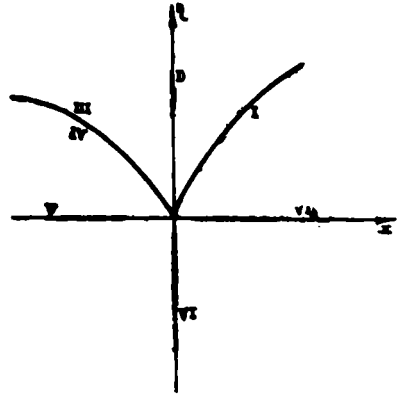


Рис. 2

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{(\pm x)^{2k_1}} &= \left(\frac{\eta^3}{x^2} - 1\right)^{k_1} \frac{\Gamma\left(-2k_1 + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k_1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6} - k_1\right)} F\left(-k_1, k_1 + \right. \\ &+ \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1 - \frac{\eta^3}{x^2}}\left.) \pm \left(\frac{\eta^3}{x^2} - 1\right)^{k_1 - \frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(-2k_1 + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-k_1) \Gamma\left(-k_1 + \frac{1}{3}\right)} \times \right. \\ &\left. \times F\left(-k_1 + \frac{1}{2}, -k_1 + \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{1 - \frac{\eta^3}{x^2}}\right). \quad (18) \right. \end{aligned}$$

В области VI будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{(\pm x)^{2k_1}} &= \left(-\frac{\eta^3}{x^2}\right)^{k_1} \frac{2\Gamma\left(-2k_1 + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cos\pi\left(k_1 + \frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(-k_1 + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(-k_1 + \frac{1}{2}\right)} \times \\ &\times F\left(-k_1, -k_1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{\eta^3}\right) \pm \left(-\frac{\eta^3}{x^2}\right)^{k_1 - \frac{1}{2}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{2\Gamma\left(-2k_1 + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \operatorname{sn}\pi\left(k_1 + \frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(-k_1 + \frac{1}{3}\right) \Gamma(-k_1)} \times \\ & \times F\left(-k_1 + \frac{5}{6}, -k_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{\eta^3}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Эти формулы пригодны как для значения $k=0$, так и для $k=-1$, а для $k=1$ следует учесть равенство

$$\begin{aligned} (k-1) \Gamma\left(-2k_1 + \frac{5}{6}\right) &= -1, \text{ тогда } \frac{\Lambda_2(k=1)}{k-1} (k-1) \Gamma\left(-2k_1 + \right. \\ & \left. + \frac{5}{6}\right) = \frac{72}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, определено линейное решение в полной окрестности точки А с включением области $y > 0$, где характеристики мнимые.

Произведем замену переменных

$$V_x = y + V_x, \quad V_y = x + V_y + C_{2,4}, \quad \text{где } C_{2,4} = \text{const}, \quad (20)$$

и перейдем к независимым переменным V_x, V_y . Тогда уравнение (1) приведет к уравнению Трикоми

$$V_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V_y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V_x^2} = 0, \quad x = \frac{\partial \Phi}{\partial V_x}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial V_y}, \quad (21)$$

где Φ связано с потенциалом $\bar{\varphi}$ нелинейной задачи

$$\Phi = -\bar{\varphi} - xy - C_{2,4} \cdot y + xV_x + yV_y. \quad (22)$$

Отсюда видно, что можно полагать

$$\Phi = -\varphi_0(V_y, V_x) + V_x V_y + G_{1,3} V_x + C, \quad (23)$$

где $C, G_1, C_3 = \text{const}$, а $\varphi_0(x, y)$ есть значение потенциала $\bar{\varphi}$ для линейного решения (11)–(19), поэтому Φ удовлетворяет (21) и вдали от каустики переходит в линейное решение.

В работе [4] производился двойной расчет падающей ударной волны. Один раз решение (23) использовалось по обе стороны АВ, причем условия на волне АВ удовлетворялись приближенно. Второй раз тот же расчет производился в предположении, что (23) выполняется лишь впереди АВ, а позади АВ решение находилось численно методом характеристик.

Характеристики уравнения (1) имеют вид

$$\frac{dx}{dy} = \mp \sqrt{-(y + V_x)}, \quad V_y = \mp \frac{2}{3} (-V_x)^{\frac{3}{2}} + \text{const}, \quad (24)$$

а условия на ударных волнах АВ и АС —

$$\frac{dx}{dy} = \mp \sqrt{-\left(y + \frac{V_x + V_x^0}{2}\right)}, \quad (V_y - V_y^0) = -(V_x - V_x^0) \frac{dx}{dy}. \quad (25)$$

При расчетах было использовано условие эволюционности для разрывов [9], которое требует, чтобы три характеристики были приходящими на разрыв, а одна — уходящая. Для выполнения этого условия на волне АВ при ее расчете следует двигаться со стороны больших значений x к меньшим, т. е. справа налево (см. рис. 1) или, что то же самое, волна АВ рассчитывается сверху вниз. Что касается отраженной от каустики волны АС, то при направлении движения справа налево ее надо рассчитывать снизу вверх, т. е. начиная от каустики. Только при таком направлении расчета на волне АС будет выполняться вышеприведенное условие эволюционности.

§ 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСЧЕТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Для расчета течения вблизи ударной волны АВ использовалась методика расчета, приведенная в работе [10]. При этом решение впереди АВ предполагалось известным и совпадающим с (11), (16), (23).

Значение параметров $V_x = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}$ было задано на характеристике C_1 — вдали от каустики как впереди, так и позади волны АВ.

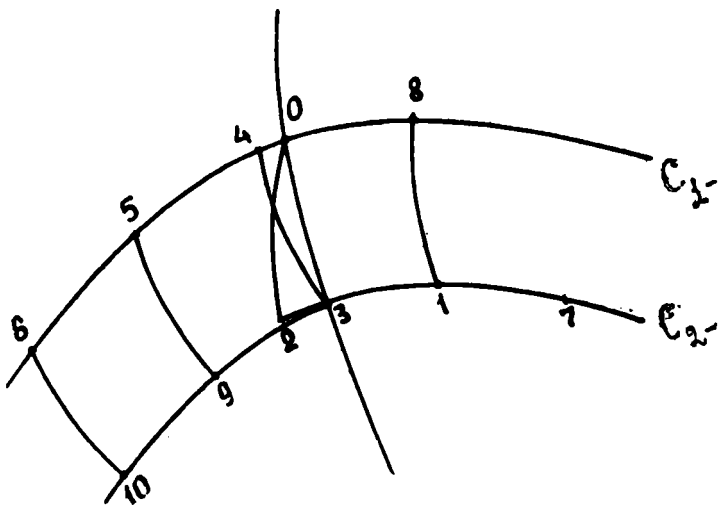


Рис. 3.

Последовательность вычислений следующая: допустим точка 0 скачка уже вычислена, и решение в точках 5, 6, 8 известно. Искомая точка 3 лежит на пересечении ударной волны со следующей характеристикой того же семейства C_2 . Решение известно впереди волны АВ, поэтому в точках 1, 7 можем определить все параметры. Затем, игнорируя скачок, продолжаем характеристику C_2 — в область II. Из точки 0 проводим характеристику второго семейства до пересечения ее в точке 2 с характеристикой C_2 . При этом используются параметры со стороны области I. Тогда, применяя квадратичную интерполяцию, можем по точкам 2, 1, 7 найти искомые величины в точке 3 скачка со стороны области I. Для определения параметров в точке 3 со

стороны области II проведем из точки 3 характеристику второго семейства до пересечения ее в точке 4 с характеристикой $C_{1\dots}$. Затем, используя дифференциальное соотношение вдоль характеристики 3—4, а также условие перехода через скачок

$$V_{y_1} - V_{y_1}^0 - C_2 + C_4 = (V_{x_1} - V_{x_1}^0) \sqrt{-\frac{V_{x_1} + V_{x_1}^0}{2}},$$

можем определить неизвестные еще параметры в точке 3 со стороны области II.

После вычисления всех искоемых величин точки 3 был проведен пересчет [11] для повышения порядка точности. Для того чтобы точки 9, 10, начиная с некоторого момента, не перескочили в область I, их следует на каждом этапе вычислений с использованием интерполяции вдоль характеристики 9—10 отодвигать от точки 3 так, чтобы расстояние между точками 3, 9, 10 по V_{x_1} оставалось равным 0,01.

Результаты этих расчетов приведены в [4]. Полученное решение основано на предположении о возможности расчета области гиперболичности уравнений независимо от значений параметров движения в области эллиптичности. Поэтому это решение можно считать удовлетворительным всюду, кроме малой окрестности параболической линии, являющейся нелинейным аналогом каустики. В указанной области решение позади АВ быстро возрастает, причем $V_{x_1} \rightarrow 0$, в то время как впереди АВ в силу (11), (16), (23) решение возрастает медленнее. Поэтому в некоторой точке на АВ $V_{x_1} < 0$ (впереди АВ), а $V_{x_1} = 0$ (позади АВ).

Этот результат приводит к тому, что ударная волна АВ оканчивается в некоторой точке, не находящейся на параболической линии и содержащей разрыв решения, что, вообще говоря, невозможно. Поэтому в этой малой окрестности параболической линии расчет следует проводить с учетом данных в эллиптической области.

Одним из вероятных способов расчета является следующий: пусть заданы значения V_x, V_y на некоторой линии $x_1 = \text{const} > 0$ вдали от точки О (рис. 1). Проведем через точку К пересечения линии MN с линией $V_{x_1} = 0$ характеристику ТК семейства C_{\dots} . Пусть на MN задано решение, например, в виде (11), (16), (23). Это решение будет иметь место в области КТВМ, а для расчета области ниже КТ следует учитывать данные на KN, которая уже расположена в области эллиптичности, т. е. надо решать задачу для уравнения смешанного типа. Корректно поставленной задачей такого типа является задача Трикоми. В ней значения параметров задаются на характеристике КТQ и на контуре KNPR, на котором имеет место решение (23), причем $\varphi_0 = \bar{\varphi}$ задается через $-\varphi(k)$ из (11) аналитическим продолжением решения в область NPR. Далее эта задача может быть решена методом конечных разностей, который для «транззвуковых» течений применен в работе [12]. Однако в этой работе не приводятся результаты расчетов и не указано для какого вида решения на волне АВ приведены расчеты, что не позволяет получить представление о соответствующих результатах.

Задачу можно решать также вводом в правую часть уравнения (1) диссипативного слагаемого $\delta \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}$. Тогда, вводя потенциал $\bar{\varphi}$ по формулам

$$V_x = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y},$$

из (1) получим

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} \left(y + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} = \delta \frac{\partial^3 \bar{\varphi}}{\partial x^3}, \quad (26)$$

где δ есть малый диссипативный коэффициент.

При таком способе решения в качестве начальных данных следует задавать на линии MN (рис. 1) величины $\bar{\varphi}$, $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2}$. Значения этих функций можно взять из линейного решения (11)—(19) или из нелинейного решения (23) с использованием (11)—(19). Уравнение (26) можно получить для конкретных видов слабо диссипативных сред. Коэффициент δ характеризует отношение коэффициента диссипации среды (вязкости и т. д.) к нелинейности и может быть произвольным. Но для выявления формы линии разрыва лучше δ считать малым и рассматривать (26) как уравнение с искусственной вязкостью.

Автор выражает глубокую признательность А. Г. Багдоеву за постановку задачи и ценные советы в ходе ее решения.

Кафедра мат. обеспечения ЭВМ

Поступила 26.05.1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Guirand J. P., Comptes Rendus, t. 266, № 6, 1965.
2. Багдоев А. Г., Изв. АН Арм. ССР, Механика, XXII, № 1, 1969.
3. Багдоев А. Г., ДАН АН Арм. ССР, LIII, № 1, 1971.
4. Манукян С. М., Ученые записки ЕГУ, № 3, 1974.
5. Газарян Ю. А., Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. 5, изд. ЛГУ, 1961.
6. Бабич В. М., Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, т. 5, Л., 1961.
7. Кварцов Ю. А., Радиофизика, № 4, 7, 1964.
8. Багдоев А. Г., Оганесян Г. Г., ДАН Арм. ССР, XLIX, № 2, 1969.
9. Jeffrey A., Taniuti T., Nonlinear wave propagation, New-York, 1964.
10. Волконская Т. Г., Численные методы в газовой динамике, М., 1963.
11. Жуков А. И., Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 58, 1960.
12. Мёрман Э., Крупп Дж., Численные методы в механике жидкостей, М., 1973.

Ս. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ԿԱՌՈՍՏԻԿԱՅԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ ԹՎԱՅԻՆ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է հոծ միջավայրի ոչ գծային շարժման պարամետրերի որոշման խնդիրը, երբ թույլ հարվածային ալիքը անցնում է համապատասխան գծային խնդրի ալիքների պարուրիչը հանդիսացող կառուտիկայի շրջակայքով: Մանրամասն հետազոտվում է կառուտիկայի լրիվ շրջակայքում ոչ ստացիոնար խնդրի գծային լուծումը: Տրվում է ընկնող ճառագայթի խարակտերիստիկաների միջոցով նախկինում կատարված հաշվարկի հետազոտությունը: Չեփակվում է տրանսմյանային խնդիրը, որի համար ստացված գծային լուծումը կարող է օգտագործվել որպես եզրային խնդիր: