ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2005 Естественные науки

Математика

УДК 515.1

В. С. АТАБЕКЯН

О ПРОСТРАНСТВАХ С ОПЕРАЦИЕЙ ПРЕДЕЛА

В работе изучаются пространства (X, Λ) с операцией предела, введенные И. Г. Хачатряном, с точки зрения нестандартных моделей. С помощью нестандартных расширений описываются полная система окрестностей пространства (X, Λ), открытые и замкнутые множества, сходимость, предельные точки данного множества, а также отделимые пространства.

Пусть X – непустое множество, элементы которого будем называть точками. Каждой точке $x \in X$ сопоставим непустое семейство множеств V_x, содержащих x. Ясно, что V_x – центрированное семейство. Элементы $v \in V_x$ назовем *начальными окрестностями* точки x. Напоминаем, что последовательностью точек множества X называется любое отображение $\hat{s}: \mathbb{N} \to X$. Следующее определение впервые было введено в монографии [1].

Определение 1. Точка $x \in X$ называется пределом последовательности $\hat{s} \in X^{\mathbb{N}}$ по семейству начальных окрестностей V_x, если для любого $v \in V_x$

$$|\{n;\, n \in \mathbb{N} \wedge \hat{s}(n) \notin v\}| < \infty,$$

где $\hat{s}(n) \in X$ – значение отображения $\hat{s}$ на $n \in \mathbb{N}$.

Как видно из определения, здесь не требуется, чтобы семейства окрестностей V_x задавали топологию на множестве X.

Если $x \in X$ – предел последовательности $\hat{s}$ по семейству начальных окрестностей V_x, то будем писать: $\hat{s} \xrightarrow{V_x} x$. Пусть $v \subset X$. Рассмотрим прообразы начальных окрестностей при отображении $\hat{s}$: $\hat{s}^{-1}(v) = \{n;\ n \in \mathbb{N} \wedge \hat{s}(n) \in v\}$. Очевидно, если $u \subset v$, то $\hat{s}^{-1}(u) \subset \hat{s}^{-1}(v)$ и $\mathbb{N} - \hat{s}^{-1}(u) \supset \mathbb{N} - \hat{s}^{-1}(v)$. Таким образом, $\hat{s} \xrightarrow{V_x} x$ тогда и только тогда, когда $\forall v \left[v \in V_x \Rightarrow |\mathbb{N} - \hat{s}^{-1}(v)| < \infty\right]$.

Через $F(V_x)$ обозначим фильтр, порожденный семейством V_x [2]. Из определения фильтра немедленно следует

Лемма 1. $\hat{s} \xrightarrow{V_x} x \Leftrightarrow \hat{s} \xrightarrow{F(V_x)} x$.

Если $\hat{s}\xrightarrow{V_x}x$, то, очевидно, семейство $\{\hat{s}^{-1}(v)\}_{v\in F(V_x)}$ является фильтром на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Если Φ_1 и Φ_2 – два фильтра, то запись $\Phi_1 \prec \Phi_2$ означает, что фильтр Φ_2 мажорирует фильтр Φ_1. Через Φ обозначим фильтр Фреше, определенный на множестве натуральных чисел. Леммы 2–7 нетрудно доказать, если исходить из соответствующих определений.

Лемма 2. $\hat{s}\xrightarrow{V_x}x \Leftrightarrow \{\hat{s}^{-1}(v)\}_{v\in F(V_x)} \prec \Phi$.

Через $s(x,V_x)$ обозначим множество всех последовательностей, сходящихся к точке $x\in X$ по семейству окрестностей V_x:

$$s(x,V_x)=\{\hat{s};\ \hat{s}\in X^{\mathbb{N}} \wedge \hat{s}\xrightarrow{V_x}x\}.$$

Для каждой точки x выберем семейство $U_x\subset 2^X$ таким образом, что

$$u\in U_x \Leftrightarrow \forall\hat{s}[\hat{s}\in s(x,V_x)\Rightarrow \hat{s}^{-1}(u)\in\Phi].$$

Из леммы 2 следуют:

Лемма 3. Семейство U_x является фильтром и $F(V_x)\prec U_x$.

Лемма 4. $\hat{s}\xrightarrow{V_x}x \Leftrightarrow \hat{s}\xrightarrow{U_x}x$.

Лемма 5. $\forall\hat{s}[\hat{s}\in s(x,V_x)\Rightarrow\{\hat{s}^{-1}(v)\}_{v\in V_x}\prec\{\hat{s}^{-1}(u)\}_{u\in U_x}\prec\Phi]$.

Лемма 6. Если W_x такая система окрестностей точки $x\in X$, что

$$\forall\hat{s}[\hat{s}\in s(x,V_x)\Rightarrow\{\hat{s}^{-1}(v)\}_{v\in V_x}\prec\{\hat{s}^{-1}(w)\}_{w\in W_x}\prec\Phi],\text{ то}$$

$$\forall\hat{s}[\hat{s}\in s(x,V_x)\Rightarrow\{\hat{s}^{-1}(v)\}_{v\in V_x}\prec\{\hat{s}^{-1}(w)\}_{w\in W_x}\prec\{\hat{s}^{-1}(u)\}_{u\in U_x}].$$

Определение 2 [1]. Для начальной системы окрестностей $\{V_x\}_{x\in X}$ семейство $\{U_x\}_{x\in X}$ называется *полной системой окрестностей* точки x, а любое $u\in U_x$ называется *окрестностью* точки x.

Рассмотрим отображение $\Lambda: X^{\mathbb{N}}\to 2^X$, для которого $x\in\Lambda(\hat{s})\Leftrightarrow\hat{s}\xrightarrow{V_x}x$.

Определение 3 [1]. Пара (X,Λ) называется *пространством с операцией предела*, порожденным начальной системой окрестностей $\{V_x\}_{x\in X}$.

Лемма 7. Если $s(x,V_x)\neq\varnothing$, то $x\in\Lambda(s(x,V_x))$.

Если $v\subset X$, то через P_v обозначим одноместный предикат, определяющий множество v, т.е. $P_v: X\to\{0,1\}$ такое отображение, что

$$(x\in v\Rightarrow P_v(x)=1)\ \wedge\ (x\notin v\Rightarrow P_v(x)=0).$$

Пусть (X,Λ) – пространство с операцией предела, порожденное начальной системой окрестностей $\{V_x\}_{x\in X}$. Обозначим $\mathbb{F}_x=\{P_v,\ v\in V_x\}$ и $\mathbb{F}=\bigcup_{x\in X}\mathbb{F}_x$. Ясно, что пространство (X,Λ) однозначно определяет модель $(X,\mathbb{F})$ и наоборот.

Теперь рассмотрим модель $(\mathbb{N}\cup X,\mathbb{S})$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, а $\mathbb{S}$ – множество всевозможных предикатов на $\mathbb{N}\cup X$. Пусть $(X_1,\mathbb{S}_1)$ – нестандартная модель теории $Th(\mathbb{N}\cup X,\mathbb{S})$ [3, 4]. Тогда $X_1=\mathbb{N}^*\cup X^*$, где $\mathbb{N}^*$– нестандартная модель множества натуральных чисел. Можно считать, что $\mathbb{N}\subset\mathbb{N}^*$ и $X\subset X^*$, более того, когда X – бесконечное множество, то $X\neq X^*$. Если $v\in V_x$, то предикату P_v соответствует подмножество $v^*\subset X^*$, причем $v\subset v^*$.

Определение. Множество $O_x=\bigcap\limits_{u\in U_x}u^*$ назовем *микроокрестностью* точки x.

Очевидно, $x\in O_x$. Если $y\in O_x$, то будем писать $y\approx x$.

Каждой последовательности $\hat{s}:\mathbb{N}\to X$ соответствует отображение $\hat{s}^*:\mathbb{N}^*\to X^*$.

Теорема 1. Пусть $v\subset X$ и $\hat{s}:\mathbb{N}\to X$. Тогда формула

$$\exists m\forall n[n>m\Rightarrow\hat{s}(n)\in v]$$

истинна тогда и только тогда, когда для любого бесконечно большого натурального числа $\alpha\in\mathbb{N}^*-\mathbb{N}$ имеет место $\hat{s}^*(\alpha)\in v^*$.

Доказательство. Если существует такое натуральное число m_0, что из $n>m_0$ следует $s(n)\in v$, то для любого бесконечно большого натурального числа α будет выполняться $\hat{s}^*(\alpha)\in v^*$, поскольку $\alpha>m_0$. Обратно, если предположить, что $\forall m\exists n[n>m\wedge\hat{s}(n)\notin v]$, то, взяв в качестве m бесконечно большое число, получим противоречие с условием $\hat{s}^*(\alpha)\in v^*$.

Следствие 1.1. $\hat{s}\xrightarrow{V_x}x$ тогда и только тогда, когда для любого бесконечно большого числа α выполняется $\hat{s}^*(\alpha)\in O_x$, т.е. $\hat{s}^*(\alpha)\approx x$.

Следствие 1.2. В пространстве (X,Λ) множество M секвенциально компактно (см. [1], определение 1.11) тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\hat{s}$ выполняется следующее условие:

$$\forall\alpha\big(\alpha\in(\mathbb{N}^*-\mathbb{N})\Rightarrow\hat{s}^*(\alpha)\in M^*\big)\Rightarrow\exists x\exists\beta\big(x\in M\wedge\beta\in(\mathbb{N}^*-\mathbb{N})\wedge\hat{s}^*(\beta)\in O_x\big).$$

Теорема 2. Пусть $x\in u\subset X$. Тогда $u\in U_x\Leftrightarrow O_x\subset u^*$.

Доказательство. Необходимость следует из определения множества O_x. Докажем достаточность. Предположим, что $\hat{s}\xrightarrow{U_x}x$. Согласно следствию 1.1, $\forall\alpha[\alpha\in(\mathbb{N}^*-\mathbb{N})\Rightarrow\hat{s}^*(\alpha)\in O_x]$, а поскольку по условию теоремы $O_x\subset u^*$, то для любого бесконечно большого натурального числа $\alpha\in\mathbb{N}^*$ имеет место $\hat{s}^*(\alpha)\in u^*$. Тогда, в силу теоремы 1, $\hat{s}\xrightarrow{U_x}x\Leftrightarrow\hat{s}\xrightarrow{U_x\cup\{u\}}x$. Но так как U_x – полная система окрестностей точки x, то $u\in U_x$, что и требовалось доказать.

Следствие 2.1 Подмножество $u\subset X$ является открытым множеством пространства (X,Λ) (см. [1], определение 1.4) тогда и только тогда, когда

$$\forall x(x\in u\Rightarrow O_x\subset u^*).$$

Доказательство. Необходимость немедленно следует из определения открытого множества, а достаточность – из теоремы 2.

Когда (X,Λ) – топологическое пространство, из следствия 2.1 непосредственно вытекает теорема 1.3 (гл. 3 из [3]).

Следствие 2.2. Множество M замкнуто в пространстве (X,Λ) тогда и только тогда, когда $\forall x[x\in X-M \Rightarrow O_x \subset X^*-M^*]$.

Следствие 2.3. Множество M замкнуто тогда и только тогда, когда

$$\forall x[O_x \cap M^* \neq \varnothing \Rightarrow x\in M].$$

Теорема 3. В пространстве (X,Λ) точка x является предельной точкой подмножества $M\subset X$ (см. [1], определение 1.7) тогда и только тогда, когда $\exists x_1[x_1\in M^* \wedge x_1 \approx x \wedge x_1 \neq x]$.

Доказательство. Если x – предельная точка множества M, то существует последовательность $\hat{s}:\mathbb{N}\to M-\{x\}$, которая сходится к x, т.е. $\hat{s}\xrightarrow{U_x} x$. Таким образом, с одной стороны, по теореме 1, для любого бесконечно большого натурального числа $\alpha\in\mathbb{N}^*-\mathbb{N}$ имеет место $\hat{s}^*(\alpha)\in M^*-\{x\}$, с другой стороны, согласно следствию 1.1, $\hat{s}^*(\alpha)\approx x$. Значит,

$$\hat{s}^*(\alpha)\in O_x\cap(M^*-\{x\})=(O_x\cap M^*)-\{x\}.$$

В качестве x_1 можно взять $x_1=\hat{s}^*(\alpha)$.

Чтобы доказать обратную импликацию, допустим, что x не является предельной точкой множества M. Тогда, если $\hat{s}\xrightarrow{U_x} x$, то

$$\exists m\forall n[n>m\Rightarrow \hat{s}(n)\in X-(M-\{x\})].$$

Значит, $\hat{s}$ сходится к x и по семейству U_x, и по семейству $U_x\cup\{X-(M-\{x\})\}$. Так как $\hat{s}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к x, а U_x – полная система окрестностей точки x, то $u=X-(M-\{x\})\in U_x$. Но тогда $u\cap(M-\{x\})=\varnothing$ и, таким образом, $u^*\cap(M^*-\{x\})=\varnothing$. В силу $O_x\subset u^*$ заключаем, что $O_x\cap(M^*-\{x\})=\varnothing$, а это противоречит условию теоремы.

Следствие 3.1. Точка x – предельная точка для множества M тогда и только тогда, когда $O_x\cap(M^*-\{x\})\neq\varnothing$.

Следствие 3.2. Множество M замкнуто тогда и только тогда, когда M содержит все свои предельные точки.

Доказательство следует из следствий 2.2 и 3.1.

Пусть I – произвольное направленное множество (определение см. в [1–3]). Теорема А. Робинсона (см.[3], теорема 8.1, гл.1) утверждает, что для любого направленного множества I можно построить нестандартную модель $(X_1,\mathbb{S}_1)$ теории $Th(I\cup X,\mathbb{S})$, для которой $X_1=I^*\cup X^*$, а $I^*\supset I$ – такое направленное множество, в котором существует элемент $i^*\in I^*$ такой, что $\forall i\,(i\in I\Rightarrow i^*>i)$. Можно считать, что $X\subset X^*$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1 и следствия 1.1, получим следующий результат (определение направленности см. в [1–3, 5]).

Теорема 4. В пространстве (X, Λ) направленность $r: I \to X$ сходится к точке x (см. [1], определение 1.22) тогда и только тогда, когда для любого $i^* \in I^*$, удовлетворяющего условию $\forall i\,(i \in I \Rightarrow i^* > i)$, выполняется $r^*(i^*) \in O_x$, т.е. $r^*(i^*) \approx x$.

В заключение докажем следующую теорему.

Теорема 5. Пространство (X, Λ) отделимо (см. [1], определение 1.13) тогда и только тогда, когда существует такое направленное множество I и такая нестандартная модель $(X_1, \mathbb{S}_1)$ теории $Th(I \cup X, \mathbb{S})$, в которой истинна формула

$$\forall x \forall y \Big((x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y) \Rightarrow O_x \cap O_y = \varnothing \Big).$$

Доказательство. Пусть (X, Λ) – отделимое пространство и $x, y \in X$, где $x \neq y$. По определению отделимого пространства, существуют $u \in U_x$ и $v \in U_y$ такие, что $u \cap v = \varnothing$. Тогда $u^* \cap v^* = \varnothing$. Так как $O_x \subset u^*$ и $O_y \subset v^*$, то $O_x \cap O_y = \varnothing$.

Обратно, пусть (X, Λ) – не отделимое пространство. Тогда существуют такие различные точки x и y в X, что любая окрестность $u \in U_x$ точки x пересекается с любой окрестностью $v \in U_y$ точки y. Множество всевозможных пар (u, v), где $u \in U_x$ и $v \in U_y$, является направленным множеством относительно порядка $(u, v) \prec (u_1, v_1) \Leftrightarrow (u \subset u_1 \wedge v \subset v_1)$. По предположению, каждое пересечение $u \cap v$ не пусто, значит, из каждого пересечения $u \cap v$ можно выбрать по точке $z_{u \cap v}$. Тогда направленность $r: I \to X$, где $I = U_x \times U_y$ и $r((u, v)) = z_{u \cap v}$, в пространстве (X, Λ) сходится и к точке x, и к точке y. Согласно лемме 8, существует $i^* \in I^*$ такое, что $r^*(i^*) \in O_x$ и $r^*(i^*) \in O_y$, а это противоречит условию $O_x \cap O_y = \varnothing$. Теорема доказана.

Следствие 4.1 [3, 5]. Топологическое пространство является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда никакая направленность в этом пространстве не сходится к двум различным точкам.

Кафедра алгебры и геометрии *Поступила 01.02.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хачатрян И.Г.** Пространства с операцией предела. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1999.
2. **Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А.** Общая топология. М.: Высш. школа, 1979.
3. **Девис М.** Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980.
4. **Робинсон А.** Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М.: Наука, 1967.
5. **Келли Дж. Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981.

Վ. Ս. ԱԹԱԲԵԿՅԱՆ

ՍԱՀՄԱՆԻ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅԱՄԲ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում Ի.Գ. Խաչատրյանի կողմից ներմուծված (X,Λ) սահմանի գործողությամբ տարածությունները ուսումնասիրվում են ոչ ստանդարտ մոդելների տեսանկյունից: Ոչ ստանդարտ ընդլայնումների միջոցով նկարագրվում են (X,Λ) տարածության շրջակայքերի լրիվ համակարգը, նույն տարածության բաց և փակ բազմությունները, զուգամիտությունը, տվյալ բազմության սահմանային կետերը, ինչպես նաև անջատելի տարածությունները:

V. S. ATABEKIAN

SPACES WITH LIMIT OPERATION

Summary

In this work the space (X,Λ) with limit operation (constracted by I. G. Khachatryan) is studied with the help of non-standard models. With the help of non-standard extentions are described the complete systems of neighbourhoods of (X,Λ), the open and closed sets, the convergence, the limit points of the set, the spaces as well as separation spaces.