ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1980 Естественные науки

В. С. САРКИСЯН, В. В. ВАРДАНЯН, А. В. КЕРОПЯН

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОМ УПРУГОМ УДАРЕ ШАРОМ ПО ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе рассматривается задача о поперечном упругом ударе шаром о свободно опертую по контуру прямоугольную пластинку методом конечных элементов (МКЭ). Материалы шара и пластинки изотропные. Удар рассматривается упругий, т. е. местная деформация предполагается состоящей из упругой части, определяемой по известной теории Герца. В работе используется известный метод С. П. Тимошенко, примененный им для решения задачи о ударе шаром о балку.

Приведены рекуррентные формулы для определения силы соударения и продолжительности удара, а также численный пример, рассчитанный на ЭВМ «ЕС-1022».

В некоторой точке (x_0, y_0) пластинки (размеры которой в плане $a \times в$: толщина h, плотность ϱ, упругие постоянные E, ν) ударяет шар радиусом r, массой m_0, с упругими постоянными E_0, ν_0. Скорость соударения V_0 направлена нормально к пластинке. Определяется сила соударения в зависимости от времени, тем самым находятся основные характеристики удара—максимальная сила P_{max} и продолжительность удара T.

Решение указанной задачи для изотропного и анизотропного тела исследованы в работах [1, 2] на основе разработанного Н. А. Кильчевским метода использования преобразования Лапласа [3].

Однако этот метод содержит существенный недостаток, заключающийся в том, что вместо основного соотношения теории Герца для местного сжатия двух тел $P = KU^{3/2}$ (P—сила сжатия в данном случае удара, U—величина сжатия, K—постоянный коэффициент пропорциональности) используется соотношение $P^* = KU^{*3/2}$, где P^* и U^*—преобразования Лапласа величин P и U.

Здесь используется свободный от указанного недостатка метод С. П. Тимошенко [3], примененный им для решения задачи об ударе шаром о балку; этот метод может быть применен в данной задаче об ударе шаром по пластинке, благодаря использованию метода конечных элементов. Он отличается от известных методов решения динамических задач с применением МКЭ [4] тем, что применяется разбиение только тела на КЭ, а по другой переменной времени—получается обыкновенное дифференциальное уравнение. Здесь же время t тоже разбивается на малые интервалы τ, т. е. принимается $t = \tau j$, где $j = 0, 1, 2, \ldots$

Пластинка разбивается на прямоугольные КЭ, причем так, чтобы точка соударения совпала с некоторой вершиной (узлом). Вершины узловых перемещений и усилий, а также выражение матрицы жесткости для прямоугольного КЭ приведены в [5]. Основными неизвестными будут прогибы в неопорных узлах W_i $(i=1, 2,...,n)$, причем $n=(n_1-1)\times\times(n_2-1)$, где n_1 и n_2—число разбиений по направлениям X и Y. Кроме этого, рассматриваются вспомогательные неизвестные—углы поворота φ_x и φ_y вокруг осей X и Y соответственно, т. е. φ_{x_i} $(i=1, 2,...,n')$ и φ_y $(i=1, 2,...,n'')$, где $n'=(n_1-1)(n_2+1)$ и $n''=(n_1+1)(n_2-1)$ в n' и n'', кроме n неопорных узлов, учитываются и опорные узлы, в которых имеют место соответственно повороты φ_x и φ_y.

Применяя принципы Даламбера и в каждом неопорном узле прилагая силы инерции $F_i(i=1, 2,...,n)$, можно составить условия равновеси $\sum F_{iz}=0$, $\sum M_x=0$, $\sum M_y=0$, которые в матричном виде записываются так:

$$
\begin{gathered}
GW+H\Phi_x+L\Phi_y=P-F,\\
MW+N\Phi_x=0,\\
RW+S\Phi_y=0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $W=\{W_i\}$, $\Phi_x=\{\varphi_{x_i}\}$, $\Phi_y=\{\varphi_{y_i}\}$ соответственно столбцы $n\times1$, $n'\times1$, $n''\times1$; G, H, L, M, N, R, S—матрицы соответственно порядков $n\times n$, $n\times n'$, $n\times n''$, $n'\times n$, $n'\times n'$, $n''\times n$, $n''\times n''$. Элементы этих матриц выражаются через элементы матрицы жесткости КЭ [5] непосредственно при составлении условий равновесия (1). F и P представляют собою столбцы порядка $n\times1$ соответственно сил инерции и сил удара: $F=\{F_i\}$, а в столбце P все элементы, кроме i_0-ого элемента, будут равны нулю; i_0—узел, совпадающий с точкой соударения. Таким образом, P может быть записан в виде $P=P\{\delta_{ii_0}\}$, где P—сила удара, δ_{ii_0}—символ Кронекера.

Исключая из (1) Φ_x и Φ_y, получим

$$UW=P-F, \tag{2}$$

где

$$U=G-HN^{-1}M-LS^{-1}R.$$

Квадратную матрицу U можно назвать матрицей жесткости пластинки.

Если в момент времени $t'=\tau(j-1)$ обозначить столбцы прогибов и скоростей в узлах соответственно через W^{j-1} и $\dot{W}^{j-1}$, а в момент времени $t=\tau j$—через W^j и $\dot{W}^j$, то будем иметь рекуррентные соотношения

$$W^j=W^{j-1}+\dot{W}^{j-1}\tau+m^{-1}F^{j-1}\frac{\tau^2}{2}, \tag{3}$$

$$\dot{W}^j=\dot{W}^{j-1}+m^{-1}F^{j-1}\tau, \tag{4}$$

где $m=\mathrm{diag}\,\{m_1, m_2,...,m_n\}$ —диагональная матрица масс, рассматриваемых как сосредоточие в узлах, F^{j-1} означает столбец сил инерции в момент времени $t'=\tau(j-1)$. Таким образом, уравнения (2)—(4) устанавливают требуемую зависимость между силой удара $P^j=P^j_{i_0}$ и прогибом $W^j=W^j_{i_0}$, после чего решаются уравнения движения шара:

$$S^j = S^{j-1} + \dot{S}^{j-1}\tau - \frac{P^{j-1}\tau^2}{2m_0}, \tag{5}$$

$$\dot{S}^j = \dot{S}^{j-1} - \frac{P^j\tau}{m_0}, \tag{6}$$

где S^{j-1} и S^j—перемещения, а $\dot{S}^{j-1}$ и $\dot{S}^j$ — скорости шара соответственно в моменты времени $t'=\tau(j-1)$ и $t=\tau j$.

Наконец, согласно теории Герца имеем

$$P^j = \left(\frac{S^j - W^j}{K}\right)^{3/2}, \tag{7}$$

где коэффициент K определяется по формуле

$$K = \sqrt[3]{\frac{9}{16r}\left(\frac{1-\nu^2}{E} - \frac{1-\nu_0^2}{E_0}\right)^2}.$$

Численный пример. Рассматриваем пример при следующих данных.

Квадратная пластинка размером в плане $a=b=20$ **см**, толщиной $h=1$ **см**; упругие постоянные $E=2\cdot 10^6\ \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, $\nu=0{,}3$; плотность $\rho=7{,}85\times\times 10^{-6}\frac{\text{кг сек}^2}{\text{см}^4}$; шар массой $m_0=0{,}27\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{кГсек}^2}{\text{см}}$; радиус $r=2$ **см**, с тем же упругими постоянными ($E_0=E$, $\nu_0=\nu$). Удар в центре пластинки $\left(x_0=\frac{a}{2},\ y_0=\frac{b}{2}\right)$ со скоростью $v_0=1\,\frac{\text{см}}{\text{сек}}$.

Пластинка была разбита на 16 квадратных КЭ ($n_1=n_2=4$), следовательно, $n=9$, $n'=n''=15$. Задача решалась на ЭВМ «ЕС—1022» при $\tau=10^{-6}$**сек.** Программа составлена на языке ФОРТРАН IV. Для основных характеристик удара получилось: $P_{max}=2{,}186$ **кГ**, продолжительность удара $T=3{,}54\cdot 10^{-4}$**сек.**

Таблица 1

$T^*=T\cdot 10^6$	0	10	35	70	105	140	170	210	245	280	305	340	354
P(кГ)	0	0,065	0,419	1,083	1,687	2,075	2,186	1,982	1,505	0,894	0.480	0,070	0

В табл. 1 показаны значения силы соударения P от продолжительности удара T^*, ($T^*=T\cdot 10^6$).

ЕГУ, ЕрПИ *Поступило 27.12.1979*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кильчевский Н. А., Константинов А. Х.**, Прикладная механика, **2**, вып. 11, 1966.
2. **Саркисян В. С.**, Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела, изд-во ЕГУ, 1976.
3. **Кильчевский Н. А.**, Теория соударений твердых тел, ГИТТЛ, М., 1949.
4. **Розин Л. А.**, Метод конечных элементов в применении к упругим телам, Стройиздат, М., 1977.
5. **Варвак П. М., Бузун И. М., Городецкий А. С.** и др., Метод конечных элементов в механике сплошной среды, изд-во Киевского автомобильно-дорожного института, Киев, 1976.

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Վ. Վ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Ա. Վ. ՔԵՐՈԲՅԱՆ

ԳՆԴԻ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱԾԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտվում է գնդի ընդլայնական առաձգական հարվածի խնդիրը ծայրերով ազատ հենված, կոնտուրով ուղղանկյուն սալին՝ վերջավոր էլեմենտների մեթոդով։ Գնդի և սալի նյութերը իզոտրոպ են։ Հարվածը դիտվում է առաձգական, այսինքն ենթադրվում է, որ տեղական դեֆորմացիան կազմված է առաձգական մասից, որը որոշվում է Հերցի հայտնի տեսությամբ։ Աշխատանքում օգտագործված է Ս. Պ. Տիմոշենկոյի հայտնի մեթոդը, որը կիրառվել է նրա կողմից գնդի հարվածը հեծանին խնդրի լուծման համար։

Բերված են ռեկուրենտ բանաձևեր հարվածի ուժի և տևողության որոշման համար, ինչպես նաև «EG—1022» էՀՄ-ով հաշված թվային օրինակ։