УДК 539.3

В. С. САРКИСЯН, М. С. ГАБРИЕЛЯН, Ю. Дж. ЮСИФ

# РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ВЕСЬМА ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается задача об оптимальной стабилизации колебаниями прямоугольной ортотропной весьма пологой оболочки, шарнирно опертой по краям. Оболочка стабилизируется при помощи управляющего воздействия, приложенного на ее верхней поверхности. Задача решается методом Фурье, после чего получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка во времени с разделяющимися переменными. Определяется оптимальное управляющее воздействие для каждого уравнения.

§ 1. Рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации колебаниями однородной ортотропной тонкой оболочки постоянной толщины $h$. Пусть имеем весьма пологую оболочку, перекрывающую прямоугольный план со сторонами $a$ и $b$. Обозначим криволинейные ортогональные координаты точки на поверхности оболочки через $\alpha$ и $\beta$. Для рассматриваемой оболочки принято, что коэффициенты первой квадратичной формы $A=1$, $B=1$, а главные кривизны координатной поверхности $k_1(\alpha, \beta)$, $k_2(\alpha, \beta)$ ведут себя как постоянные. Координатная поверхность совпадает с срединной поверхностью оболочки.

В случае, когда оболочка загружена лишь нормально приложенной поверхностной нагрузкой $Q(\alpha, \beta, t)$ ($t$—время), получим следующее дифференциальное уравнение колебаний для потенциальной функции $\psi(\alpha, \beta, t)$ ([1], стр. 467):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[L_2(c_{ij})\Psi]+\frac{g}{h\gamma}[L_1(D_{ij})L_2(c_{ij})\Psi+\nabla_r^2\Psi]=\frac{g}{h\gamma}Q(\alpha,\beta,t) \qquad (1.1)$$

где $L_1$, $L_2$, $\nabla_r^2$—следующие дифференциальные линейные операторы

$$L_2(c_{ij})=\frac{c_{11}}{\Omega}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+\left(\frac{1}{c_{66}}-2\frac{c_{12}}{\Omega}\right)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{c_{22}}{\Omega}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4},$$

$$L_1(D_{ij})L_2(c_{ij})=P_1\frac{\partial^8}{\partial\alpha^8}+p_3\frac{\partial^8}{\partial\alpha^6\partial\beta^2}+p_5\frac{\partial^8}{\partial\alpha^4\partial\beta^4}+p_4\frac{\partial^8}{\partial\alpha^2\partial\beta^6}+p_2\frac{\partial^8}{\partial\beta^8},$$

$$\nabla_r^2=k_2^2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2k_1k_2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+k_1^2\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}, \qquad (1.2)$$

g—ускорение силы тяжести, $\gamma$—удельный вес материала, $c_{ij}$, $D_{ij}$—жесткости.

Предположим, что оболочка шарнирно оперта по всему контуру [1, 2], а начальные условия имеют вид:

$$\text{при } t=0,\ w=f(\alpha,\beta),\quad \frac{\partial w}{\partial t}=\varphi(\alpha,\beta), \tag{1.3}$$

$f(\alpha, \beta)$, $\varphi(\alpha, \beta)$—начальный прогиб и начальная скорость.

Напишем потенциальную и кинетическую энергии ([2], стр. 53).

$$V=\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^b\int_0^a [c_{11}\varepsilon_1^2+2c_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2+c_{22}\varepsilon_2^2+c_{66}\omega^2+D_{11}\varkappa_1^2+2D_{12}\varkappa_1\varkappa_2+D_{22}\varkappa_2^2+$$

$$+D_{66}\tau^2]\,d\alpha d\beta dt, \tag{1.4}$$

$$K=\frac{h\gamma}{2g}\int_0^\infty\int_0^b\int_0^a\left(\frac{\partial}{\partial t}[L_2(c_{ji})\Psi]^2\right)^2 d\alpha d\beta dt. \tag{1.5}$$

При решении этой задачи минимизируется полная энергия системы, которая представляется в следующем виде

$$I=V+K+\frac{g}{h\gamma}\int_0^\infty\int_0^b\int_0^a Q^2 d\alpha d\beta dt, \tag{1.6}$$

где последнее слагаемое представляет из себя энергию действующей силы.

Краевым и начальным условиям (1.3) удовлетворим, представляя искомую функцию $\psi(\alpha, \beta, t)$ в виде двойного ряда Фурье

$$\Psi(\alpha,\beta,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty}T_{k,n}(t)\sin\frac{k\pi}{a}\alpha\cdot\sin\frac{n\pi}{b}\cdot\beta, \tag{1.7}$$

а интенсивность поперечной нагрузки—

$$Q(\alpha,\beta,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty}u_{k,n}(t)\cdot\sin\frac{k\pi}{a}\cdot\alpha\cdot\sin\frac{n\pi}{b}\beta. \tag{1.8}$$

Подставляя значения $\psi(\alpha, \beta, t)$ и $Q(\alpha, \beta, t($ соответственно из (1.7) и (1.6) в (1.6) и, имея в виду (1.4) и (1.5), получим

$$I=\lambda\int_0^\infty\sum_{k,n=1}^{\infty}\left|\lambda_{k,n}^2T_{k,n}'^2(t)+\lambda_{k,n}H_{k,n}T_{k,n}(t)+\frac{1}{2}\mu^2u_{k,n}^2(t)\right|dt, \tag{1.9}$$

где

$$\lambda_{k,n}=\frac{C_{11}}{\Omega}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^4+\left(\frac{1}{c_{66}}-2\frac{c_{12}}{\Omega}\right)\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\frac{c_{22}}{\Omega}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4,$$

$$H_{k,n}=\frac{1}{2}\mu\left\{\lambda_{k,n}\left[D_{11}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+2(D_{12}+2D_{66})\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+D_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]+\right.$$

$$+\left[k_2\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+k_1\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2\Bigg\},\ \lambda=ab/4\mu,\ \mu=2g/h\gamma.$$

При помощи (1.7) и (1.8) из уравнения (1.1) находим

$$T''_{k,n}(t)+\frac{H_{k,n}}{\lambda_{k,n}}T_{k,n}(t)=\frac{1}{2\lambda_{k,n}}\mu u_{k,n}(t)\quad (k,n=1,2,\ldots). \tag{1.10}$$

Таким образом мы получили бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (1.10) с начальными условиями

$$T_{k,n}(0)=a_{k,n},\quad T'_{k,n}(0)=b_{k,n}, \tag{1.11}$$

где

$$a_{k,n}=\frac{4}{ab\lambda_{k,n}}\int_0^b\int_0^a f(\alpha,\ \beta)\sin\frac{k\pi}{a}\alpha\cdot\sin\frac{n\pi}{b}\beta d\alpha d\beta,$$

$$b_{k,n}=\frac{4}{ab\lambda_{k,n}}\int_0^b\int_0^a \varphi(\alpha,\ \beta)\sin\frac{k\pi}{a}\alpha\cdot\sin\frac{n\pi}{b}\beta d\alpha d\beta\quad (k,n=1,2,\ldots)$$

коэффициенты разложения прогиба и скорости оболочки при $t=0$.

Так как каждое из уравнений системы (1.10) не зависит от других уравнений, а функционал

$$I_{k,n}=\lambda\int_0^\infty\left[\lambda_{k,n}^2T_{k,n}'^2(t)+\lambda_{k,n}H_{k,n}T_{k,n}(t)+\frac{1}{2}\mu^2u_{k,n}^2(t)\right]dt\quad (k,n=1,2,\ldots) \tag{1.12}$$

зависит только от переменных, входящих в k, n-ое уравнение системы (1.10), то можно минимизировать функционал (1.9), минимизируя каждое из независимых функционалов (1.13).

Таким образом эта задача приводится к задаче аналитического конструирования оптимального регулятора [3] для каждого k, n (k, $n=1,\ 2,\ \ldots$).

При решении задачи об аналитическом конструировании оптимального регулятора функция $u_{k,n}$ ищется в виде

$$u_{k,n}=\gamma_{k1,n1}T_{k,n}+\gamma_{k2,n2}T'_{k,n}, \tag{1.13}$$

где $\gamma_{k1,\,n1}$, $\gamma_{k2,\,n2}$—постоянные.

Для определения функции Ляпунова $V_{k,n}$ $(T_{k,n},\ T'_{k,n})$, и стабилизирующего воздействия $u_{k,n},(T_{k,n},\ T'_{k,n})$, запишем уравнение Ляпунова—Беллмана

$$\frac{\partial V_{k,n}}{\partial T_{k,n}}T'_{k,n}+\frac{\partial V_{k,n}}{\partial T'_{k,n}}\left(-\frac{H_{k,n}}{\lambda_{k,n}}T_{k,n}+\frac{1}{2\lambda_{k,n}}\mu u_{k,n}\right)=\lambda\lambda_{k,n}^2T_{k,n}'^2- \tag{1.14}$$

$$-\lambda\lambda_{k,n}H_{k,n}T_{k,n}^2-\frac{1}{2}\lambda\mu^2u_{k,n}^2,\quad \frac{\partial V_{k,n}}{\partial T'_{k,n}}=-2\lambda\mu\lambda_{k,n}u_{k,n}\quad (k,\ n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Предполагая, что функция $V_{k,n}$—квадратичная форма от $T_{k,n}$ и $T'_{k,n}$ вида

$$V_{k,n}=A_{k1,n1}T_{k,n}^2+2A_{k2,n2}T_{k,n}T'_{k,n}+A_{k3,n3}T'^2_{k,n}, \tag{1.15}$$

и, приравнивая соответствующие коэффициенты в уравнениях (1.13) и (1.14), получим систему уравнений относительно $\gamma_{ki,ni}$ и $A_{ki,ni}$,

$$-2\frac{H_{k,n}}{\lambda_{k,n}}A_{k2,n2}+\frac{1}{\lambda_{k,n}}H_{k,n}A_{k2,n2}\gamma_{k1,n1}=-\lambda\lambda_{k,n}H_{k,n}-\frac{1}{2}\lambda\mu\gamma^2_{k1,n1},$$

$$2A_{k1,n1}+2A_{k3,n3}\left(-\frac{1}{\lambda_{k,n}}H_{k,n}+\frac{1}{2\lambda_{k,n}}\mu\gamma_{k1,n1}\right)+\frac{1}{\lambda_{k,n}}\mu A_{k2,n2}\gamma_{k2,n2}=$$

$$=-\lambda\mu^2\gamma_{k1,n1}\gamma_{k2,n2},$$

$$2A_{k2,n2}+\frac{1}{\lambda_{k,n}}\mu A_{k3,n3}\gamma_{k2,n2}=-\lambda\lambda^2_{k,n}-\frac{1}{2}\lambda\mu^2\gamma^2_{k2,n2},$$

$$A_{k2,n2}=-\lambda\mu\lambda_{k,n}\gamma_{k1,n1},\quad A_{k3,n3}=-\lambda\mu\lambda_{k,n}\gamma_{k2,n2}\qquad (k,n=1,2,\ldots),$$

решение которой будет

$$A_{k1,n1}=-\frac{1}{2}\lambda\mu\gamma_{k2,n2}(2H_{k,n}-\mu\gamma_{k1,n1}).\quad A_{k2,n2}=-\lambda\mu\lambda_{k,n}\gamma_{k1,n1},$$

$$A_{k3,n3}=-\lambda\mu\lambda_{k,n}\gamma_{k2,n2},\quad \gamma_{k1,n1}=\frac{2}{\mu}\left[H_{k,n}\pm\sqrt{H^2_{k,n}+\frac{1}{2}\lambda_{k,n}H_{k,n}}\right].$$

$$\gamma_{k2,n2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda_{k,n}(\lambda_{k,n}-2\mu\gamma_{k1,n1})}\quad (k,\ n=1,2,\ldots). \tag{1.16}$$

Здесь знаки перед радикалами выбираются так, чтобы выполнялись условия

$$A_{k1,n1}>0,\quad A_{k1,n1}A_{k3,n3}-A^2_{k2,n2}>0, \tag{1.17}$$

но из (1.16) следует, что (1.17) выполняются при следующем подборе знаков

$$\gamma_{k1,n1}<0,\ \gamma_{k2,n2}>0\quad (k,\ n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.18}$$

Для определения функций $u_{k,n}$, как функций от времени, нужно интегрировать систему (1.13) при начальных условиях (1.11).

Решение системы (1.10), (1.11) и (1.13) имеет вид

$$T_{k,n}(t)=\frac{b_{k,n}-a_{k,n}\theta_{k2,n2}}{\theta_{k1,n1}-\theta_{k2,n2}}\exp(\theta_{k1,n1}t)+\frac{a_{k,n}\theta_{k1,n1}-b_{k,n}}{\theta_{k1,n1}-\theta_{k2,n2}}\exp(\theta_{k2,n2}t), \tag{1.19}$$

где

$$\theta_{ki,ni}=\frac{1}{4\lambda_{k,n}}\mu\gamma_{k2,n2}\pm\sqrt{\frac{1}{4\lambda_{k,n}}\mu^2\gamma^2_{k2,n2}+\frac{2}{\lambda_{k,n}}\mu\gamma_{k1,n1}-\frac{4}{\lambda_{k,n}}H_{k,n}}\quad (i=1,2).$$

Подставляя значения $T_{k,n}$ и $T'_{k,n}$ в (1.13), получим

$$u_{k,n}(t)=\frac{1}{\theta_{k1,n1}-\theta_{k2,n2}}[(b_{k,n}-a_{k,n}\theta_{k2,n2})(\gamma_{k1,n1}+\theta_{k1,n1}\gamma_{k2,n2})\exp(\theta_{k1,n1}t)+$$

$$+(a_{k,n}\theta_{k1,n1}-b_{k,n})(\gamma_{k1,n1}+\theta_{k2,n2}\gamma_{k2,n2})\exp(\theta_{k2,n2}t)]\quad (k,\ n=1,\ 2\ \ldots). \tag{1.20}$$

Таким образом оптимальное значение стабилизирующего воздействия $\theta(\alpha, \beta, t)$ (1·8) построено.

§ 2. Докажем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} u_{k,n}^2(t), \quad t \geqslant 0, \tag{2.1}$$

и ограниченность величины полной энергии

$$\min I = 2\lambda \sum_{k,n=1}^{\infty} \left\{ \left| \sqrt{\lambda_{k,n}\left(H_{k,n}+\frac{1}{2}\lambda_{k,n}H_{k,n}\right)\left(\frac{1}{2}\lambda_{k,n}-2H_{k,n}+\right.} \right. \right.$$

$$\left. \overline{+2\sqrt{H_{k,n}^2+\frac{1}{2}\lambda_{k,n}H_{k,n}}\right)} \left| a_{k,n}^2 + 2\lambda_{k,n}\left[\sqrt{H_{k,n}^2+\frac{1}{2}\lambda_{k,n}H_{k,n}}-\right.\right.$$

$$\left.\left. -H_{k,n}\right| a_{k,n}b_{k,n}+\lambda_{k,n}\sqrt{\lambda_{k,n}\left(\frac{1}{2}\lambda_{k,n}-2H_{k,n}+2\sqrt{H_{k,n}^2+\frac{1}{2}\lambda_{k,n}H_{k,n}}\right)}b_{k,n}^2\right\}. \tag{2.2}$$

Так как из (1.18) и (1.19) следует, что $Re(\theta_{k1,n1})<0$, $Re(\theta_{k2,n2})<0$, то для доказательства равномерной по $t \geqslant 0$ сходимости ряда (2.1) достаточно показать, что ряды

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\theta_{k1,n1}-\theta_{k2,n2}}\left[b_{k,n}(\gamma_{k1,n1}+\theta_{k1,n1}\gamma_{k2,n2}) - a_{k,n}\theta_{k2,n2}(\gamma_{k1,n1}+\right.\right.$$

$$\left.\left. +\theta_{k1,n1}\gamma_{k2,n2})\right]\right\}^2,$$

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\theta_{k1,n1}-\theta_{k2,n2}}\left[a_{k,n}\theta_{k1,n1}(\gamma_{k1,n1}+\theta_{k2,n2}\gamma_{k2,n2})-b_{k,n}(\gamma_{k1,n1}+\right.\right.$$

$$\left.\left. +\theta_{k2,n2}\gamma_{k2,n2})\right]\right\}, \tag{2.3}$$

сходятся.

Так как

$$\frac{\partial^8\Psi}{\partial\alpha^{8-j}\partial\beta^j}, \quad \frac{\partial^6\Psi}{\partial t^2\partial\alpha^{4-i}\partial\beta^i} \quad (j=0,1,\ldots,8),\ (i=0,1,\ldots 6)$$

принадлежит, по крайней мере, классу $L_2$, то ряды

$$\sum_{k,n=1}^{\infty}(k^{8-j}n^j a_{k,n})^2, \quad \sum_{k,n=1}^{\infty}(k^{6-i}n^i b_{k,n})^2, \tag{2.4}$$

$(j=0, 1, \ldots, 8)$, $(i=0, 1, \ldots, 6)$ сходятся ([4], стр. 149).

Сходимость рядов (2.2) и (2.3) вытекает из условий (2.4), выполнение которых естественно предполагать, исходя из физических соображений. Следовательно, равномерная сходимость ряда (2.1) при условиях (2.4) установлена.

Таким образом определенная функция $Q(\alpha, \beta, t)$ принадлежит классу $L_2$ и оптимально стабилизирует колебательное движение оболочки при минимизации полной энергии.

*Кафедра механики сплошной среды* *Поступило 31.08.1988*

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Саркисян В. С** Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1976.
2. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных оболочек. М.: Госиздат физ.-мат. литературы, 1961.
3. **Летов А. М**. Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 4—6; 1961, т. 22, № 4.
4. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.


## Ամփոփում


*Դիտարկվում է ուղղանկյուն,, օրթոտրոպ, թույլ ճկվածքով թաղանթի օպտիմալ կայունացման խնդիրը, երբ թաղանթը հոդակապորեն ամրացված է եզրերով։ Թաղանթի տատանումների կայունացումը տեղի է ունենում ղեկավարվող ազդեցությամբ, որը կիրառվում է թաղանթի վերին մակերևույթի վրա։ Խնդիրը լուծվում է Ֆուրիեի մեթոդով, որից հետո ստացվում է ժամանակից կախված, անջատվող փոփոխականներով երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների անվերջ համակարգ։ Որոշվում է օպտիմալ ազդեցությունը յուրաքանչյուր հավասարման համար։*


## Summary


The optimal stabilization problem of the oscillations of an orthotropic rectangular highly sloping shell which is fixed at the edges by hinges has been considered. The shell becomes stable by means of supplementary control action on its upper surface. The problem has been solved by Fourier's method, after which an infinite system of a second-order ordinary differential equations was received with separable variables. The optimal control action for each equation was formed.