ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1988 Естественные науки

УДК 517.55

Э. О. НАЗАРЯН

О МНОГОМЕРНОМ АНАЛОГЕ ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА, ИМЕЮЩЕМ ГОЛОМОРФНОЕ ЯДРО

С помощью многомерного аналога формулы Карлемана получена оценка, дающая точность приближенного решения одной задачи аналитического продолжения.

Пусть D—ограниченная область в C^n с кусочно-гладкой границей ∂D и $M \subset \partial D$—множество единственности для какого-то класса голоморфных в D функций $f(z)$ с хорошими граничными значениями при подходе к ∂D (напр., класса $A_c(D)$ голоморфных в D функций, непрерывных на $\bar{D}$, или класс Харди $H^1(D)$). За последние годы усилился интерес к некорректным задачам анализа и математической физики [1]. Одной из таких задач является задача восстановления $f(z)$ по значениям на M интегральной формулой (см., напр., [2—6]).

Рассмотрим тот же класс областей, который разбирался в работе [6]. Требуется, чтобы ∂D являлась объединением конечного числа кусков гиперповерхностей либо аналитических, либо имеющих голоморфный «барьер», гладко зависящий от точки из этого куска. Тогда существует интегральное представление с голоморфным ядром для класса $A_c(D)$, в котором интегрирование происходит по множеству N—объединению некоторых граней и ребер, содержащему границу Шилова $S(D)$ области D. Пусть $M=N \setminus L$ и существует функция $\varphi(z) \in A_c(D)$ при условиях: а) $|\varphi(z)|=1$ на L; б) $|\varphi(z)|>1$ в D. Иначе говоря, для точек из L существует единый голоморфный «барьер». Тогда имеет место многомерный аналог формулы Карлемана с голоморфным ядром [6]:

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m R(z, \zeta, d\zeta, d\bar{\zeta}), \qquad (1)$$

где $f(z) \in A_c(D)$, а R—некоторая внешняя дифференциальная форма по ζ с коэффициентами, зависящими от ζ и голоморфно зависящими от z. Там же (см. [6]) были приведены различные примеры конкретной реализации формулы (1), в которых множество M имело размерность $2n-1$ (как и размерность всей границы ∂D) и меньшую размерность. Настоящая заметка является продолжением работы [6]. В качестве дополнения к [6] отметим следующее:

1. Формулу (1) можно заменить другой

$$f(z)=\int_M f(\zeta) R(z, \zeta, d\zeta, d\zeta)+$$

$$+\int_0^\infty d\sigma\int_M f(\zeta)e^{\sigma[\psi(\zeta)-\psi(z)]}[\psi(\zeta)-\psi(z)]R(z, \zeta, d\zeta, d\bar{\zeta}), \qquad (2)$$

где $\exp\psi(z)=\varphi(z)$. Во всех примерах в [6] «барьер» $\varphi(z)$ можно задать именно в виде $\exp\psi(z)$, где $\psi(z)$ тоже входит в класс $A_c(D)$.

2. Задача аналитического продолжения, решаемая формулами (1) и (2), не является корректной, однако она условно устойчива (об этих понятиях см. в [1]), если ограничиться классом голоморфных в D функций, удовлетворяющих неравенству $|f|\leqslant c$. Данный факт следует из соответствующей теоремы о двух константах. Если дополнительно потребовать, чтобы граница ∂D входила в класс $C^{(3)}$, то нужная теорема будет следствием одного результата работы [7]. Но можно обойтись и без указанного дополнительного требования, если рассматривать сечение области D комплексными прямыми и применять одномерную классическую теорему о двух константах.

3. Рассмотрим оператор

$$R_m f=\int\limits_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m R(z,\ \zeta,\ d\zeta,\ d\bar{\zeta});$$

семейство операторов $\{R_m\}$ является регуляризующим семейством (об этом понятии см. в [1]) для данной задачи аналитического продолжения при некотором выборе пространства функций, а каждая функция $f_m(z)=R_m f(z)$ является голоморфным в D. Отметим оценку

$$|f(z)-R_m f(z)|=\left|\int\limits_N f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m R(z,\ \zeta,\ d\zeta,\ d\bar{\zeta})-\right.$$

$$\left.-\int\limits_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m R(z,\ \zeta,\ d\zeta,\ d\bar{\zeta})\right|=$$

$$=\left|\int\limits_L f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m R(z,\ \zeta,\ d\zeta,\ d\bar{\zeta})\right|\leqslant c\int\limits_L\frac{|R(z,\ \zeta,\ d\zeta,\ d\bar{\zeta})|}{|\varphi(z)|^m},\qquad(3)$$

дающую точность приближенного решения задачи аналитического продолжения с помощью оператора R_m. Эта оценка равномерна на каждом компакте, лежащем в области D.

Например, в примере 3) работы [6] рассматривался полиэдр Вейля $D\{z:|\chi_i(z)|>1,\ i=1,\ \ldots,\ N\}$, множество $N=\bigcup\gamma_{i_1\ldots i_n}$ —набор n-мерных ребер $\gamma_{i_1\ldots i_n}=\bigcap\limits_{k=1}^{n}\gamma_{i_k}$, где грани $\gamma_i=\{z:|\chi_i(z)|=1\}$. В качестве множества M рассматривалась $N|\gamma_1$, т. е. в этом случае $L=\bigcup\limits_{\gamma_{i_1\ldots i_n}\in\gamma_1}\gamma_{i_1\ldots i_n}$ и формула (3) принимает вид

$$|f(z)-R_m f(z)|\leqslant c\sum_{\gamma_{i_1\ldots i_n}\in\gamma_1}\int\limits_{\gamma_{i_1\ldots i_n}}\frac{|\Omega_{i_1\ldots i_n}(\zeta,\ z)|}{|\chi_1(z)|^m}\times$$

$$\times\frac{|d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n|}{\prod\limits_{k=1}^{n}|\chi_{i_k}(\zeta)-\chi_{i_k}(z)|},$$

где $\Omega_{i_1\ldots i_n}$ —определитель Гефера функций $\chi_{i_1},\ \cdots,\ \chi_{i_n}$, а постоянная $C=\frac{1}{(2\pi)^n}\max\limits_{z\in\bar{D}}|f(z)|$ зависит только от функции $f(z)$.

4. В [6] для $D=\{(z_1, z_2): r_1<|z_1|<R_1,\ r_2<|z_2|<R_2\}$—топологического произведения колец в C^2 проведена формула типа (1), в которой интегрирование производится по множеству, состоящему из 2 остовов (граница Шилова в данном случае состоит из 4 остовов $\Delta_{r,\rho}=\{(z_1, z_2): |z_1|=r;\ |z_2|=\rho\}$). Возникает задача построения формулы Карлемана, в которой интегрирование происходит только по одному остову. Для этой цели нельзя использовать указанную выше идею, восходящую к самому Карлеману [8]. Иначе говоря, не существует функции $\varphi(z)$ со свойствами а) и б), если $L=N|M$ состоит из 3 остовов. Если бы такая φ существовала, то из а) методом сечений нетрудно было бы получить, что $\varphi(z)=\mathrm{const}$ в D, т. е. свойство б) уже не имело бы места. Возможно для решения данной задачи удастся применить восходящую к С. Н. Мергеляну и М. М. Лаврентьеву идею построения формул Карлемана методом аппроксимации ядра интегрального представления на дополнительном множестве (в данном случае—на L) (см. [1], там есть дальнейшие литературные ссылки).

Кафедра высшей математики *Поступила 8.07.1987*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.** Некорректные задачи математической физики и анализа—М.: 1980, 280 с.
2. **Айзенберг Л. А.** Многомерный аналог формулы Карлемана.—ДАН СССР, 1984, т. 277, № 6, с. 1289—1291.
3. **Айзенберг Л. А.** Многомерные аналоги формулы Карлемана с интегрированием по граничным множествам максимальной размерности.—В сб.: Многомерный комплексный анализ. Красноярск, 1985, с. 12—22.
4. **Айзенберг Л. А.** Применение многомерных формул Карлемана.—Мат. вест., 1986, т. 38, с. 365—374.
5. **Знаменская Л. Н.** Обобщение теоремы Риссов и восстановление голоморфных функций многих комплексных переменных по их значениям на части границы Шилова.—В сб.: Многомерный комплексный анализ. Красноярск, 1985, с. 231—232.
6. **Айзенберг Л. А., Назарян Э. О.** О многомерном аналоге формулы Карлемана с голоморфным ядром.—Изв. вузов, Математика, 1984, № 9, с. 3—5.
7. **Садуллаев А.** Граничная теорема единственности в C^n.—Мат. сб., 1976, т. 101, № 4, с. 568—583.
8. **Carleman T.** Les fonctions analytiques. Paris, 1926.

Ամփոփում

Կառլեմանի բանաձևի բազմաչափ անալոգի օգնությամբ ստացված է անալիտիկ շարունակության մի խնդրի մոտավոր լուծման ճշգրտությունը նշող գնահատական։

SUMMARY

By the help of multidimensional analogue of the formula by Karleman an answer is received which gives accuracy to the approximately solved problem of the analytic continuation.