ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ • СООБЩЕНИЯ

УДК 517.51

Г. Г. ГЕВОРКЯН

О РЯДАХ ПО СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

В работе сформулированы некоторые теоремы (без доказательств) о сходимости, единственности рядов по системе Франклина, а также о представлении измеримых функций рядами по системе Франклина. Исследованы также ряды Франклина с монотонными коэффициентами.

Аналоги полученных результатов для систем Хаара доказаны в работах [3—7].

В теории общих ортогональных рядов важную роль играют как система Хаара, так и система Франклина. Обе эти системы являются базисами пространства $C[0, 1]$ и являются безусловными базисами в пространствах $L_p[0, 1]$, $1<p<\infty$. Последний факт для системы Хаара был установлен Марцинкевичем [1]. Для системы Франклина установление этого свойства долгое время оставалось открытым, и лишь в 1974 г. оно было установлено Бочкаревым [2].

Помимо указанных свойств, система Хаара обладает также другими замечательными свойствами, которые обусловлены тем, что частичные суммы рядов по системе Хаара являются мартингалами.

Хотя частичные суммы рядов по системе Франклина не являются мартингалами, тем не менее, как показывают результаты настоящей статьи, они обладают многими фундаментальными мартингальными свойствами рядов Хаара, установленных в [3—7]. Методы доказательства этих свойств системы Франклина, как и следовало ожидать, существенно отличаются от методов, примененных в [3—7]. Установлены следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы ряд по системе Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \tag{1}$$

на множестве E почти всюду сходился, необходимо и достаточно, чтобы на E почти всюду сходился ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)$.

Из теоремы 1 и из одной теоремы Орлича следует

Теорема 2. Почти всюду сходимость ряда (1) на некотором множестве E эквивалентна безусловной сходимости по мере ряда (1) на E.

Теорема 3. Если интегрируемая функция $f(x)$ в точке x_0 имеет разрыв первого рода, то в этой точке частичные суммы ряда Фурье-Франклина ограниченно расходятся.

Известно, что ряд Фурье-Франклина функции $f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$ сходится. Поэтому из теоремы 3 следует

Теорема 4. Для любого счетного множества $\{c_n\}_0^{\infty} \subset [0, 1]$ существует ряд Фурье-Франклина, который ограниченно расходится в точках c_n и сходится в остальных точках.

Теорема 5. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n}} < +\infty, \tag{2}$$

то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n f_n(x)| \tag{3}$$

почти всюду сходится на $[0, 1]$. Обратно, если $|a_m| \downarrow 0$ и ряд (3) сходится хотя бы в одной точке, справедливо неравенство (2).

Теорема 6. Для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ существует ряд (1), который почти всюду абсолютно сходится к $f(x)$.

Теорема 7. Для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ и любого положительного ε существует непрерывная функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\mu\{x \in [0, 1] : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$;

2) ряд Фурье-Франклина функции $g(x)$ абсолютно и равномерно сходится, т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x) \int_0^1 f_n(t) g(t) dt|$ равномерно сходится.

Теорема 8. Если ряд (1) с коэффициентами $|a_n| \downarrow 0$ сходится на множестве положительной меры, то (1) является рядом Фурье-Франклина некоторой функции $f(x) \in \bigcap_{p<\infty} L_p$.

Из этой теоремы следуют теоремы 9 и 10.

Теорема 9. Если $|a_n| \downarrow 0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty$, тогда ряд (1) почти всюду расходится.

Теорема 10. Ряд (1) с коэффициентами $|a_n| \downarrow 0$ или почти всюду сходится или почти всюду расходится.

Теорема 11. Пусть коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условию $a_n = 0(n^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, и $\Lambda(x) \in \mathrm{Lip}\,1$. Тогда ряды $\Lambda(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n f_n(x)$, где $b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^1 f_k(t) f_n(t) \Lambda(t) dt$ равномерно равносходятся.

Теорема 12. Пусть ряд (1) с коэффициентами $a_n = 0(n^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ на некотором отрезке имеет ограниченную подпоследовательность частичных сумм. Тогда ряд (1) на этом отрезке почти всюду сходится.

Теорема 13. Пусть ряд (1) удовлетворяет условиям:

1) ряд (1) по мере сходится к некоторой ограниченной функции $f(x)$;

2) $a_n = 0(\sqrt{n})$;

3) всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества,

$$\sup_N \max_{t \in \left(x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}\right)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x) \right| < +\infty. \tag{4}$$

Тогда ряд (1) является рядом Фурье-Франклина функции $f(x)$.

Второе условие в теореме 13 в некотором смысле неослабляемо, т. е.

существует ряд (1) с коэффициентами $a_n=O(\sqrt{n})$, который всюду, кроме одной точки, удовлетворяет условию (4), сходится к нулю, но $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|>0$.

Теорема 14. Существует ряд (1) с коэффициентами, стремящимися к нулю, который всюду, кроме некоторого множества меры нуль, удовлетворяет условию (4) и сходится к нулю, но $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|>0$.

Кафедра теории оптимального управления и приближенных методов

Поступило 29.04.1986

ЛИТЕРАТУРА

1. **Marcinkiewict.** Quelques theoremes sur les series orthogonales.-Ann. Polon. Math. 1937, v. 16, p. 84—96.
2. **Бочкарев С. В.** Существование базиса в пространстве функций аналитических в круге и некоторые свойства системы Франклина.—Мат. сб., 1974, т. 93, № 2, с. 203—217.
3. **Арутюнян Ф. Г.** О рядах по системе Хаара.—ДАН Арм. ССР, 1966, т. 42, с. 134—140.
4. **Арутюнян Ф. Г., Талалян А. А.** О единственности рядов по системе Хаара и Уолша.—ИАН СССР (сер. мат.), 1964, т. 28, № 6, с. 1391—1408.
5. **Ульянов П. Л.** О рядах по системе Хаара.—Мат. сб., 1964, т. 63, № 3, с. 356—391.
6. **Ульянов П. Л.** О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами.—ИАН СССР (сер. мат.), 1964, т. 28, № 4, с. 925—950.
7. **Gundy R.** Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series.-Trans. Amer. Math. Soc., 1966, v. 124, №2, p. 228-248.

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԸՍՏ ՖՐԱՆԿԼԻՆԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Աշխատանքում ձևակերպված են (առանց ապացուցման) որոշ թեորեմներ ըստ Ֆրանկլինի համակարգի շարքերի զուգամիտության, միակության, ինչպես նաև ըստ Ֆրանկլինի համակարգի շարքերով չափելի ֆունկցիաների ներկայացման վերաբերյալ։ Ուսումնասիրված են նաև մոնոտոն գործակիցներով Ֆրանկլինի շարքեր։

Ստացված արդյունքների անալոգները Հաարի համակարգի համար ըստացված են [3—7] աշխատանքներում։