ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1989 Естественные науки

Математика

УДК 517.51

Г. Г. ГЕВОРКЯН

О РЯДАХ ХААРА И ФРАНКЛИНА С ОДИНАКОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Доказывается, что для любых $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $p>0$ имеет место

$$\left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p \sim \left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p, \tag{1}$$

где $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$—система Хаара и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$—система Франклина.

В случае $p>1$ соотношение (1) доказано в [2], а в случае $\frac{1}{2}<p\leq 1$—в [4]. Однако методы этих работ не применимы к случаю $0<p\leq\frac{1}{2}$.

Получены некоторые следствия из (1).

Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$—система Хаара и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$—система Франклина (определения этих систем см. [1]).

Основная цель настоящей работы доказать следующую теорему.

Теорема 1. Для любой последовательности коэффициентов $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и любого $p>0$ имеет место

$$\left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p \sim \left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p. \tag{1}$$

В том случае, когда $p>1$, теорема 1 доказана в работе [2]. Однако метод доказательства из [2] не применим к случаю $p\leq 1$, поскольку там применяется одно максимальное неравенство из [3], которое неверно при $p\leq 1$.

В случае $\frac{1}{2}<p\leq 1$ соотношение (1) установлено в работе [4], но метод работы [4] не позволяет доказать (1) для $p\leq\frac{1}{2}$.

Здесь мы докажем соотношение (1) другим, на наш взгляд, более простым методом.

Сформулируем и докажем некоторые теоремы, а потом убедимся, что теорема 1 следует из этих теорем.

Теорема 2. Для любой последовательности коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любого $p>0$ справедливо соотношение

$$\left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p \sim \left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p.$$

Теорема 3. Для любой последовательности коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любого $p>0$ имеет место

$$\left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p \sim \left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p.$$

Очевидно, что достаточно доказать теоремы 1—3 в случае $p<2$.

Прежде чем доказать теоремы 2 и 3, напомним некоторые свойства систем Хаара и Франклина.

Через C обозначаются абсолютные постоянные, вообще говоря, принимающие разные значения в разных формулах, а через C_p—постоянные, зависящие только от p.

Для $n=2^\mu+\nu$, где $\mu\geqslant 0$, $1\leqslant\nu\leqslant 2^\mu$, обозначим $t_n=\dfrac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}$,

$\{n\}=\left[\dfrac{\nu-1}{2^\mu}, \dfrac{\nu}{2^\mu}\right]$ и $[n]=\mu$. Известно, что (см. [5]) $|f_n(x)|$ достигает наибольшего значения на отрезке $\{n\}$ и (см. [6])

$$\int_A f_n^2(x)dx \geqslant \frac{1}{6}, \tag{2}$$

где $A\subset\{n\}$ и $\mu(A)>\dfrac{1}{2}\mu(\{n\})$.

Очевидно, что $\chi_n(x)=0$, когда $x\overline{\in}\{n\}$.

При изложении мы будем отождествлять множества, различающиеся множествами меры нуль. В частности будем говорить $A\subset B$, если $\mu(A\setminus B)=0$.

Если $I\subset[0, 1]$, то по обозначению $I^c=[0, 1]\setminus I$, а $\chi_I(x)$—характеристическая функция множества I, $\rho(x, I)=\inf\limits_{y\in I}|x-y|$.

Если $I=\left[\dfrac{j}{2^k}, \dfrac{j+1}{2^k}\right]$, тогда будем писать $[I]=k$.

Известно, что (см. [7], [8])

$$|f_n(t)|\leqslant C\cdot 2^{\frac{[n]}{2}}\cdot q^{n|t-t_n|}\leqslant C\cdot \|f_n\|_\infty\cdot q^{n|t-t_n|}, \tag{3}$$

где $0<q<1$.

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$\left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p = 1. \tag{4}$$

Обозначим $E_0=[0, 1]$,

$$E_\gamma=\{x: \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)>2^\gamma\},\ \gamma=1, 2, \ldots, \tag{5}$$

и

$$B_\gamma=\left\{x: M_2(\chi_{E_\gamma}, x)>\frac{1}{2}\right\}, \quad \gamma=0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где $M_2(\chi_{E_\gamma}, x)$—двоичная максимальная функция характеристичекой функции множества E_γ.

Положим

$$\psi_\gamma(x)=\sum_{\substack{\{n\}\subset B_\gamma \\ \{n\}\overline{\subset}B_{\gamma+1}}} a_n^2\chi_n^2(x), \quad \gamma=0, 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Из (6) и (7) с применением (2) получаем

$$\int_0^1\psi_\gamma(x)dx=\sum_{\substack{\{n\}\subset B_\gamma \\ \{n\}\overline{\subset}B_\gamma}} a_n^2=\int_0^1 \sum_{\substack{\{n\}\subset B_\gamma \\ \{n\}\overline{\subset}B_{\gamma+1}}} a_n^2 f_n^2(x)dx\leqslant C\int_{B_\gamma\setminus E_{\gamma+1}} \sum_{\substack{\{n\}\subset B_\gamma \\ \{n\}\overline{\subset}B_{\gamma+1}}} a_n^2 f_n^2(x)dx\leqslant \tag{8}$$

$\leqslant C\cdot 2^\gamma\cdot\mu(B_\gamma)$.

Из (8) следует (применяется неравенство Гельдера с показателями $\frac{2}{p}$ и $\frac{2}{2-p}$)

$$\int_0^1(\Psi_\gamma(x))^{\frac{p}{2}}dx=\int_{B_\gamma}(\Psi_\gamma(x))^{\frac{p}{2}}dx\leqslant(\mu(B))^{1-\frac{p}{2}}\Big(\int_{B_\gamma}\Psi_\gamma(x)dx\Big)^{\frac{p}{2}}\leqslant C\cdot 2^{\frac{\gamma p}{2}}\mu(B_\gamma). \tag{9}$$

Из (9), (5), (4) с учетом $\mu(B_\gamma)\leqslant C\cdot\mu(E_\gamma)$ получаем

$$\left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p\leqslant\sum_{\gamma=0}^{\infty}\int_0^1(\Psi_\gamma(x))^{\frac{p}{2}}dx\leqslant C\cdot\sum_{\gamma=0}^{\infty}2^{\frac{\gamma p}{2}}\mu(E_\gamma)\leqslant C.$$

Пусть теперь

$$\left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p=1. \tag{10}$$

Опять положим $E_0=[0, 1]$ и

$$E_\gamma=\left\{x:\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)>2^\gamma\right\}, \quad \gamma=1, 2, \cdots \tag{11}$$

Для $\gamma=1, 2, \ldots$ отрезок $[0, 1]$ обозначим через $I_1^{(0,\gamma)}$, если $\mu(E_\gamma)\geqslant\frac{1}{4}$, а если $\mu(E_\gamma)<\frac{1}{4}$, то будем считать, что нет отрезка $I_j^{(0,\gamma)}$. Разделим $[0, 1]$ на две равные части и из них обозначим через $I_j^{(1,\gamma)}$ те интервалы, которые не пресекаются с $I_j^{(0,\gamma)}$ и удовлетворяют условию

$$\frac{\mu(I_j^{(1,\gamma)}\cap E_\gamma)}{\mu(I_j^{(1,\gamma)})}\geqslant\frac{1}{4}.$$

На k-том шаге разделим отрезок $[0, 1]$ на 2^k равных интервала $\left(\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right)$, $j=1, 2, \ldots, 2^k$, и обозначим через $I_j^{(k,\gamma)}$ те интервалы, которые не пересекаются с $I_j^{(q,\gamma)}$ при всех $q<k$ и

$$\frac{\mu(I_j^{(k,\gamma)}\cap E_\gamma)}{\mu(I_j^{(k,\gamma)})}\geqslant\frac{1}{4}.$$

Положим $B_0=[0, 1]$ и

$$B_\gamma=\bigcup_{k}\bigcup_{j} I_j^{(k,\gamma)},\quad \gamma=1,2,\cdots. \tag{12}$$

Ясно, что

$$\mu(B_\gamma)\leqslant 4\cdot\mu(E_\gamma). \tag{13}$$

Положим

$$\Psi_{\gamma kj}(x)=\sum_{\substack{\{n\}\subset I_j^{(k,\gamma)}\\ \{n\}\,\overline{\subset}\, B_{\gamma+1}}} a_n^2 f_n^2(x),\quad \gamma=0, 1, 2, \ldots$$

Аналогично (8) получаем

$$\int_0^1 \Psi_{\gamma kj}(x)dx\leqslant C\cdot 2^{\gamma}\cdot\mu(I_j^{(k,\gamma)}).$$

Следовательно,

$$\int_{I_j^{(k,\gamma)}}(\Psi_{\gamma kj}(x))^{\frac{p}{2}}dx\leqslant(\mu(I_j^{(k,\gamma)}))^{1-\frac{p}{2}}\Big(\int_{I_j^{(k,\gamma)}}\Psi_{\gamma kj}(x)dx\Big)^{\frac{p}{2}}\leqslant C\cdot 2^{\frac{\gamma p}{2}}\mu(I_j^{(k,\gamma)}). \tag{14}$$

Поскольку $f_n(x)$ линейна на каждой половине $\{n\}$ и достигает своего наибольшего значения на $\{n\}$, то из $\{n\}\,\overline{\subset}\, B_\gamma$ следует $\|a_n f_n(x)\|_\infty\leqslant C\cdot 2^{\frac{\gamma}{2}}$. Учитывая это и неравенство (3), для $x\,\overline{\subset}\, I_j^{(k,\gamma)}$ получаем

$$\Psi_{\gamma kj}(x)=\sum_{\mu=[I_j^{(k,\gamma)}]}^{\infty}\ \sum_{\substack{\{n\}\subset I_j^{(k,\gamma)}\\ \{n\}\,\overline{\subset}\, B_{\gamma+1}\\ [n]=\mu}} a_n^2 f_n^2(x)\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{\mu=[I_j^{(k,\gamma)}]}\ \sum_{\substack{\{n\}\subset I_j^{(k,\gamma)}\\ \{n\}\,\overline{\subset}\, B_{\gamma+1}\\ [n]=\mu}} 2^{\gamma}\cdot q^{2^{\mu+1}|x-t_n|}\leqslant C\, 2^{\gamma}\sum_{\mu=[I_j^{(k,\gamma)}]} q^{2^{\mu+1}\rho(x,I_j^{(k,\gamma)})}. \tag{15}$$

Из (15) следует, что

$$\int_{(I_j^{(k,\gamma)})^c}(\Psi_{\gamma kj}(x))^{\frac{p}{2}}dx\leqslant C_p\cdot 2^{\frac{\gamma p}{2}}\sum_{\mu=[I_j^{(k,\gamma)}]}\ \int_{(I_j^{(k,\gamma)})^c} q^{p\cdot 2^{\mu}\cdot\rho(x,I_j^{(k,\gamma)})}dx\leqslant$$

$$\leqslant C_p\cdot 2^{\frac{\gamma p}{2}}\sum_{\mu=[I_j^{(k,\gamma)}]} 2^{-\mu}\int_0^\infty q^t dt\leqslant C_p\cdot 2^{\frac{\gamma p}{2}}\cdot\mu(I_j^{(k,\gamma)}). \tag{16}$$

Из (16), (14), (13), (12) и (11) получаем

$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^\infty a_n^2 f_n^2(x)\right)^{\frac{p}{2}}dx\leqslant\sum_{\gamma=0}^\infty\sum_{k,j}\int_0^1(\Psi_{\gamma kj}(x))^{\frac{p}{2}}dx\leqslant C_p\sum_{\tau=0}^\infty 2^{\frac{\gamma p}{2}}\sum_{k,j}\mu(I_j^{(k,\gamma)})\leqslant$$

$$\leqslant C_p\sum_{\gamma=0}^\infty 2^{\frac{\gamma p}{2}}\mu(E_\gamma)\leqslant C_p. \tag{17}$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть выполнено (10) и множества E_γ, B_γ определяются формулами (11), (12). Положим

$$\Psi_{\gamma kj}(x)=\sum_{\substack{\{n\}\subset I_j^{(k,\gamma)}\\ \{n\}\subset B_{\gamma+1}}} a_n^2\chi_{n+1}^2(x),\quad \gamma=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Легко видеть, что если $J_{\gamma kj}$—носитель функции $\Psi_{\gamma kj}$, то

$$\mu(J_{\gamma kj})\leqslant 2\cdot\mu(I_j^{(k,\gamma)}).$$

Поэтому

$$\int_0^1(\Psi_{\gamma kj}(x))^{\frac{p}{2}}dx=\int_{J_{\gamma kj}}(\Psi_{\gamma kj}(x))^{\frac{p}{2}}dx\leqslant C\cdot 2^{\frac{\gamma p}{2}}\cdot\mu(I_j^{(k,\gamma)}). \tag{18}$$

Аналогично (17) из (18) получится $\left\|\left\{\sum_{n=1}^\infty a_n^2\chi_{n+1}^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p\leqslant C_p$.

Точно так же устанавливается, что из $\left\|\left\{\sum_{n=1}^\infty a_n^2\chi_{n+1}^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p=1$ следует $\|\{\sum_{n=1}^\infty a_n^2\chi_n^2 f_n^2(x)\}^{\frac{1}{2}}\|_p\leqslant C_p$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\|\{\sum_{n=0}^\infty a_n^2 f_n^2(x)\}^{\frac{1}{2}}\|_p=1$. Тогда $|a_0|\leqslant 1$ и $\|\{\sum_{n=0}^\infty a_n^2 f_n^2(x)\}^{\frac{1}{2}}\|_p\leqslant 1$. Применяя теоремы 2 и 3, получаем

$$\int_0^1\{\sum_{n=0}^\infty a_n^2\chi_{n+1}^2(x)\}^{\frac{1}{2}}dx\leqslant 1+\int_0^1\{\sum_{n=1}^\infty a_n^2\chi_{n+1}^2(x)\}^{\frac{p}{2}}dx\leqslant$$

$$\leqslant 1+\int_0^1\{\sum_{n=1}^\infty a_n^2\chi_n^2(x)\}^{\frac{p}{2}}dx\leqslant C_p.$$

Аналогично устанавливается, что из $\|\{\sum_{n=0}^\infty a_n^2\chi_{n+1}^2(x)\}^{\frac{1}{2}}\|_p=1$ следует $\|\{\sum_{n=0}^\infty a_n^2 f_n^2(x)\}^{\frac{1}{2}}\|_p\leqslant C_p$.

Из результатов работ [6], [9] с применением теоремы 1 получаются следующие теоремы.

Теорема 4. Ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n f_n(x)$ безусловно сходится в $L_p(0,\ 1)$, $0<$

$<p\leqslant 1$, тогда и только тогда, когда безусловно сходится в L_p (0, 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$.

Теорема 5. Для любой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и любого $0<p<1$ имеет место

$$\|\sup_N |\sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)|\|_p \sim \|\sup_N |\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)|\|_p.$$

Отметим, что утверждения теорем 4 и 5 неверны при $p=0$.

В [10] доказано, что для любого p, $1<p<\infty$, оператор сдвига $T: f_n \to f_{n+1}$ является ограниченным оператором из пространства L_p в пространство L_p, а в [11] поставлен вопрос: ограничен ли оператор сдвига в L_1. На этот вопрос дан отрицательный ответ в [5].

В работе [6] установлено, что при $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ имеет место

$$\|\sup_N |\sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)|\|_p \sim \|\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)\|_{\mathrm{ReH}_p\Delta}. \tag{19}$$

Учитывая (19), из теорем 5, 3 и из (см. [9])

$$\|\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\}^{\frac{1}{2}}\|_p \sim \|\sup_N |\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)|\|_p,\ p>0,$$

получаем следующую теорему.

Теорема 6. Оператор сдвига $T: f_n \to f_{n+1}$—ограниченный оператор из $\mathrm{ReH}_p(\Delta)$ в $\mathrm{ReH}_p(\Delta)$, $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$.

Эта теорема в случае $p=1$ доказана в работе [12].

Кафедра теории оптимального управления и приближенных методов

Поступила 4.05.1989

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кашин Б. С., Саакян А. А.** Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
2. **Ciesielski Z., Simon P., Sjolin P.** Equivalense of Haar and Franklin bases in Lp Spaces.—Studia math., 1977, v. 60, p. 195—210.
3. **Fefferman C. L., Stein E. M.** Some maximal inequalities.—Amer. J. math., 1971, v. 93, p. 107—115.
4. **Sjolin P., Strömberg J. O.** Basis properties of Hardy spaces.—Ark. math., 1983, v. 21, № 1, p. 111—125.
5. **Геворкян Г. Г.** Неограниченность оператора сдвига по системе Франклина в пространстве L_1.—Мат. заметки, 1985, т. 38, № 4, с. 523—533.
6. **Геворкян Г. Г.** Некоторые теоремы о безусловной сходимости и мажоранте рядов Франклина и их применение к пространствам ReHp.—Труды МИАН, 1989.
7. **Ciesielski Z.** Properties of the orthonormal Franklin system.—Studia math., 1963, v. 23, p. 141—157.
8. **Ciesielski Z.** Properties of the orthonormal Franklin system, II.—Studia math., 1966, v. 27, p. 289—323.

9. **Burkholder D., R. Cundy R.** Extrapolation and interpolation of quasilinear operators on martingales.— Acta math., 1970, v. 124, p. 249—304.
10. **Ciesielski Z., Kwapien S.** Some properties of the Haar, Walsh-Paley, Franklin and the bounded polygonal orthonormal bases in Lp Spaces Commentat.—Math. Tom. Spec. Honor. Ladislae Orlicz. Part 2, Warszawa, 1979, p. 37—42.
11. **Ciesielski Z.** Convergence of spline expansions, Linear spaces and approximation.— Birkhäuser Verlag-Basel, 1978, p. 433—448.
12. **Simon P.** Remarks on the shift operators with respect to the Haar and Franklin systems.—Acta math. Acad. Sci. Hungar. 1982, v. 39 (1—3), p. 251—254.

Ամփոփում

Ապացուցված է, որ կամայական $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *և* $p>0$ *համար տեղի ունի*

$$\left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p \sim \left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p, \qquad (1)$$

որտեղ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *Հաարի համակարգն է և* $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *Ֆրանկլինի համակարգն է։*

Այն դեպքում, երբ $p>1$, *(1) առնչությունը ապացուցված է [2]-ում, իսկ* $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ *դեպքում՝ [4]-ում։ Սակայն, այդ աշխատանքների մեթոդները կիրառելի չեն* $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ *դեպքում։*

Ստացված են որոշ հետևանքներ (1) առնչությունից։

SUMMARY

If $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ is Haar system and $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ is Franklin system, then for every $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $p>0$ the following relation is proved

$$\left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p \sim \left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p \qquad (1)$$

(1) has been proved in [2] when $p>1$ and in [4] when $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ but the methods of [2] and [4] are not applicable in the case $0<p\leqslant\frac{1}{2}$.

Some consequences are received from (1) as well.