ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2.1997 Естественные науки

Механика

УДК 531.36

С.Г. ШАГИНЯН, С.Р. АМБАРЦУМЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается задача устойчивости по действующей силе системы нелинейных дифференциальных уравнений в критическом случае, когда характеристическое уравнение соответствующего линейного приближения системы имеет один нулевой корень.

Получены достаточные условия, накладываемые на нелинейные члены, при которых тривиальное решение асимптотически устойчиво или неустойчиво по действующей силе.

1. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i = \Phi_i(y_1,\ldots,y_n) \quad (i=1,\ldots,n), \tag{1.1}$$

где $\Phi_i(y_i,\ldots,y_n): R^n \to R^1$ - аналитические функции в R^n и $\Phi_i(0,\ldots,0)=0$ $(i=1,\ldots,n)$.

Известно [1] (стр. 57), что в этом случае систему (1.1) можно привести к виду

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} y_k + Y_i(y_1,\ldots,y_n) \quad (i=1,\ldots,n), \tag{1.2}$$

линейное приближение которого будет

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} y_k \quad (i=1,\ldots,n). \tag{1.3}$$

Пусть корни характеристического уравнения системы (1.3) удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 = 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_j < 0 \quad (j=2,\ldots,n). \tag{1.4}$$

Известно [1] (стр. 74), что в этом случае только с помощью линейного приближения (1.3) невозможно решить задачу устойчивости системы (1.2), т.е. имеем критический случай.

Известно также, что при условии (1.4) с помощью неособого преобразования

$$x = Cy \tag{1.5}$$

$(\det C \neq 0)$ систему (1.3) можно привести к виду [1] (стр. 90), [2] (стр. 141)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_i = a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i=2,\ldots n), \end{cases} \tag{1.6}$$

а систему (1.2) - к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1,\ldots,x_n), \\ \dot{x}_i = a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + X_i(x_1,\ldots,x_n) \quad (i=2,\ldots n), \end{cases} \tag{1.7}$$

где вектор-функция $X(x_1,\ldots,x_n)$ содержит члены не ниже второго порядка переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Известно также [1] (стр. 101), что в зависимости от функции $X_1(x_1,\ldots,x_n)$ тривиальное решение системы дифференциальных уравнений (1.7) может быть устойчивым, неустойчивым или асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Попытаемся получить условия, накладываемые на функции $X_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(i=1,\ldots,n)$, при которых тривиальное решение системы (1.7) будет устойчивым, неустойчивым или асимптотически устойчивым по действующей силе.

2. Сначала рассмотрим следующий частный случай. Исследуем только первое уравнение системы (1.7), принимая, что $n=1$. В этом случае система (1.7) примет следующий вид:

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1). \tag{2.1}$$

Обозначая в (2.1) $x=x_1$ и $X=X_1$, получим

$$\dot{x} = X(x), \tag{2.2}$$

что можно представить в виде

$$\dot{x} = g_0 x^m + g_1 x^{m+1} + \cdots, \tag{2.3}$$

где $g_0, g_1, \ldots$ - некоторые постоянные, а $m \geq 2$.

В этом случае вопрос устойчивости по действующей силе рассматриваемой задачи решается следующим образом:

1) если m - четное число $(m=2k)$ или m - нечетное число $(m=2k+1)$ и $g_0>0$, то тривиальное решение уравнений (2.2) неустойчиво по Ляпунову [1] (стр. 92), следовательно, оно будет неустойчивым и по действующей силе [3];

2) если m - нечетное число $(m=2k+1)$ и $g_0<0$, то тривиальное решение уравнений (2.2) асимптотически устойчиво по Ляпунову [1] (стр. 92). А если нелинейная система асимптотически устойчива по Ляпунову, то она может быть как устойчива, так и неустойчива по действующей силе [4]. Очевидно, что если тривиальное решение уравнения (2.2) асимптотически устойчиво в целом, то оно будет асимптотически устойчивым по действующей силе. Но когда тривиальное решение уравнения (2.2) асимптотически устойчиво только в некоторой области $|x| \leq h \ (h<\infty)$, то оно может быть неустойчивым по действующей силе [4].

Докажем следующие теоремы.

Теорема 2.1. Если разложение функции $X(x)$, входящей в уравнение (2.2), содержит только нечетные степени переменной x с неположительными коэффициентами, хотя бы один из которых отличен от нуля, то тривиальное решение уравнения (2.2) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Доказательство. Пусть уравнение (2.3) имеет следующий вид:

$$\dot{x} = g_0 x^m + g_2 x^{m+2} + \cdots, \tag{2.4}$$

где $g_{2i} \leq 0 \quad (i=0,1,2,\ldots)$, а $m=2k+1$, причем существует $g_k \neq 0$.

Рассмотрим определенно-положительную функцию

$$V = \frac{1}{2}x^2 \tag{2.5}$$

В этом случае

$$\dot{V}\Big|_{(2.4)} = x\left(g_0 x^m + g_2 x^{m+2} + \cdots\right) = \sum_{p=k+1}^{\infty} g_{2(p-k-1)} x^{2p}$$

Так как $g_{2i} \le 0 \quad (i = 0,1,2,\ldots)$ и существует $g_k \neq 0$, то функция $\dot{V}\Big|_{(2.4)}$ будет определенно-отрицательной при $|x| < \infty$. Очевидно, что для функции (2.5) выполняется также условие

$$\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty,$$

т.е. в данном случае для уравнений (2.4) удовлетворяются все условия теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [5]. Следовательно, тривиальное решение уравнения (2.4) асимптотически устойчиво в целом. В этом случае оно будет асимптотически устойчивым по действующей силе.

Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Если разложение функции $X(x)$, входящей в уравнение (2.2), содержит только нечетные степени переменной x, коэффициент первого члена которого отрицателен, а остальные - неотрицательны, хотя бы один из которых отличен от нуля, то тривиальное решение уравнения (2.2) неустойчиво по действующей силе.

Доказательство. Пусть уравнение (2.3) имеет вид (2.4), где $g_0 < 0, \quad g_{2i} \ge 0$ $(i = 1,2,3\ldots)$, а $m = 2k + 1$, причем существует $g_k \neq 0$.

Рассмотрим снова определенно-положительную функцию (2.5).

Ее производная в силу системы (2.4) будет

$$\dot{V}\Big|_{(2.4)} = x^{m+1}\left(g_0 + g_2 x^2 + \ldots\right).$$

Обозначим

$$W(x) = g_2 x^2 + \ldots$$

В этом случае

$$\dot{V}\Big|_{(2.4)} = x^{m+1}\left(g_0 + W(x)\right).$$

Очевидно, что функция $W(x)$ определенно-положительная. Поскольку $g_0 < 0$, а функция $W(x)$ и x^{m+1} определенно-положительные ($m+1$ - четное число) при $|x| < \infty$, то существует x_* такое, что

$$W(x_*) = -g_0.$$

Следовательно,

$$\dot{V} < 0 \text{ при } |x| < |x_*| \equiv h$$

и

$$\dot{V} > 0 \text{ при } |x| > h.$$

Поскольку функция (2.5) определенно-положительная и тривиальное решение уравнения (2.4) асимптотически устойчиво по Ляпунову только в области $|x| < h$ $(h < \infty)$, а $\dot{V}\Big|_{(2.4)} > 0$ при $|x| > h$, то для уравнения (2.4) выполняются все условия теоремы о неустойчивости по действующей силе [4].

Следовательно, тривиальное решение уравнения (2.4) неустойчиво по действующей силе.

Теорема 2.2. доказана.

3. Рассмотрим систему (1.7) в общем случае. Известно [1] (стр. 93), что систему (1.7) можем записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_0 x_1^m + g_1 x_1^{m+1} + \cdots + X_1'(x_1, \cdots, x_n) \\ \dot{x}_i = a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + X_i(x_1, \cdots, x_n), \quad (i = 2, \cdots, n), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $g_0, g_1, \ldots$ - некоторые постоянные и $m \geq 2$.

В этом случае также:

1) если m - четное число $(m = 2k)$ или m - нечетное число $(m = 2k+1)$ и $g_0 > 0$, то тривиальное решение системы (3.1) неустойчиво по Ляпунову [1] (стр 101), тогда оно будет неустойчивым по действующей силе [3];

2) если m - нечетное число $(m = 2k+1)$ и $g_0 < 0$, то в этом случае тривиальное решение системы (3.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пусть тривиальное решение уравнения

$$\dot{x}_1 = g_0 x_1^m + g_1 x_1^{m+1} + \cdots = X_1(x_1, 0, \cdots, 0) \tag{3.2}$$

асимптотически устойчиво в целом. В этом случае для уравнения (3.2) существует определенно-положительная функция $V_1(x_1)$ [6] (стр. 37) такая, что ее производная в силу системы (3.2) - определенно-отрицательная функция, и выполняется условие

$$\lim_{x_1 \to \infty} V_1(x_1) = \infty.$$

Для системы (3.1) в качестве функции Ляпунова принимаем

$$V(x_1, \cdots, x_n) = V_1(x_1) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j, \tag{3.3}$$

где коэффициенты b_{ij} - неизвестные пока постоянные.

Так как система

$$\dot{x}_i = a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \quad (i = 2, \cdots, n) \tag{3.4}$$

асимптотически устойчива, то при любой определенно-отрицательной квадратичной форме $W(x_2, \cdots, x_n)$ коэффициенты b_{ij} определяются из условия

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j\right)\Bigg|_{(3.4)} = W(x_2, \cdots, x_n)$$

единственным образом.

Предположим, что

$$\frac{dV_1(x_1)}{dx_1} X_1'(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} b_{ij} x_j X_i(x_1, \cdots, x_n) \tag{3.5}$$

- отрицательная знакопостоянная функция при $\|x\| < \infty$

Составим полную производную функции $V(x_1, \cdots, x_n)$ вдоль решений системы (3.1), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, \cdots, x_n)\Big|_{(3.1)} &= \frac{dV_1(x_1)}{dx_1} \cdot X_1(x_1, 0, \cdots, 0) + \frac{dV_1(x_1)}{dx_1} \cdot X_1'(x_1, \cdots, x_n) + \\ &+ W(x_2, \cdots, x_n) + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} b_{ij} x_j X_i(x_1, \cdots, x_n). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Производная $\dot{V}(x_1, \cdots, x_n)\Big|_{(3.1)}$ при условии (3.5) определенно-отрицательная при $\|x\| < \infty$, откуда следует, что тривиальное решение системы (3.1) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1 Если система (1.7) имеет вид (3.1), уравнение (3.2) асимптотически устойчиво в целом и выполняется условие (3.5), то тривиальное решение системы (1.7) асимптотически устойчиво по действующей силе.

4. Рассмотрим конкретный пример.

Пусть имеем материальную точку массой m, которая движется на плоскости $z=0$ под действием упругой силы и силы сопротивления.

Будем считать, что $F_{упр.} = -cy$, а $R_x = -a_1\dot{x}^3, R_y = -a_2\dot{y}$.

Предположим, что на точку действует также гироскопическая сила $\overline{G}$ с проекциями

$$G_x = -b_1\dot{x}\dot{y}^4, \quad G_y = b_1\dot{x}^2\dot{y}^3; (b_1 > 0).$$

В этом случае дифференциальные уравнения точки будут

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -a_1\dot{x}^3 - b_1\dot{x}\dot{y}^4 \\ m\ddot{y} = -cy - a_2\dot{y} + b_1\dot{x}^2\dot{y}^3, \end{cases}$$

что можем привести к виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_3x_1^3 - bx_1x_3^4 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -k^2x_2 - a_4x_3 + bx_1^2x_3^3, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $x_1 = \dot{x};\ x_2 = y;\ x_3 = \dot{y};\ a_3 = \dfrac{a_1}{m};\ b = \dfrac{b_1}{m};\ a_4 = \dfrac{a_2}{m};\ k^2 = \dfrac{c}{m}.$

Очевидно, что система (4.1) имеет вид (3.1), а тривиальное решение уравнения

$$\dot{x}_1 = -a_3x_1^3 \tag{4.2}$$

асимптотически устойчиво в целом.

Если для линейного приближения последних двух уравнений системы (4.1)

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -k^2x_2 - a_4x_3 \end{cases}$$

возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V_2(x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_2^2 + \frac{1}{k^2}x_3^2),$$

то условие (3.5) примет вид

$$-(1 - \frac{1}{k^2})bx_1^2x_3^4,$$

что представляет собой знакопостоянную отрицательную функцию при $k \geq 1(\dfrac{c}{m} \geq 1)$, т.е. в данном примере для системы (4.1) при $k \geq 1(\dfrac{c}{m} \geq 1)$ удовлетворяются все условия теоремы 3.1, следовательно, тривиальное решение системы (4.1) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Работа выполнена в рамках научной темы под грифом 96-862, которая финансируется из государственных централизованных источников РА.

Кафедра теоретической механики

Поступила 25.02.1997

ЛИТЕРАТУРА

1. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, 530 с.
2. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988, 548 с.
3. **Габриелян М.С., Шагинян С.Г** О построении функции Ляпунова. - Уч. записки ЕГУ, 1987, №1, с. 39-45.
4. **Шагинян С.Г.,Амбарцумян С.Р.** О неустойчивости по действующей силе. - Уч. записки ЕГУ, 1996, №2, с. 30-36.
5. **Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.** О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. - ПММ, 1954, т.18, в. 3, с. 345-350.
6. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959, 211с.

Ս.Գ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ, Ս.Ռ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ԸՍՏ ԱԶԴՈՂ ՈՒԺԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրը կրիտիկական դեպքում, երբ համակարգի գծային մոտավորության համապատասխան բնութագրիչ հավասարումն ունի մեկ զրոյական արմատ։

Ստացված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում դիտարկվող համակարգի զրոյական լուծումը կլինի ասիմպտոտիկ կայուն կամ անկայուն ըստ ազդող ուժի։