ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,1996 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

Ю. М. МОВСИСЯН, А. Г. БАРХУДАРЯН

О СВЕРХМНОГООБРАЗИИ QB-АЛГЕБР

В настоящей работе продолжается (начатое в [6]) исследование алгебр, удовлетворяющих сверхтождествам булевых алгебр. Характеризуются решетки конгруэнций и сверхмногообразий таких алгебр.

§0. Понятия гомоморфизм, подалгебра, прямые и подпрямые произведения и т. п. в настоящей работе имеют несколько иной смысл, чем это принято в универсальной алгебре "первой ступени" или "язык первой ступени" [1]. Об этих понятиях, составляющих суть универсальной алгебры "второй ступени", а также о сверхтождествах и сверхмногообразиях можно прочитать в [2]. Здесь же приведем несколько обозначений и дополнительных определений, которые пригодятся при чтении работы.

Через n(f) обозначим арность операции f. T_A будет обозначать арифметический тип алгебры A, т. е. множество арностей операций алгебры A. Подалгебры вида $\langle Q,\Sigma'\rangle$ алгебры $A=\langle Q,\Sigma\rangle$ назовем полуподалгебрами или редуктами этой алгебры. Гомоморфизм $(\varphi,\psi)\colon A_1\to A_2$ назовем полуэпиморфизмом или полуизоморфизмом, если φ соответственно сюръективно или биективно. Заметим, что определенное аналогичным способом понятие полумономорфизма не отличалось бы от мономорфизма. Если алгебры A_1 и A_2 изоморфны, то пишем $A_1\cong A_2$.

Если дано семейство алгебр $\{A_i\}_{i\in I}$, где $A_i=\langle Q_i,\Sigma_i\rangle$, то для каждого $i\in I$ через ε_i обозначим проекцию прямого произведения $\prod\limits_{i\in I}A_i$ на i-ю координату. Обыкновенно для $a\in\prod\limits_{i\in I}Q_i$ вместо $\varepsilon_i(a)$ пишем a_i. Полупрямым произведением алгебр $\{A_i\}_{i\in I}$ назовем любую полуподалгебру прямого произведения $\prod\limits_{i\in I}A_i$.

Несколько слов о конгруэнциях. Нетрудно проверить, что понятия подпрямой неразложимости в смыслах теорий алгебр 1-ой и 2-ой ступеней совпадают. А так как конгруэнции в нашей работе используются в основном в связи с подпрямой неразложимостью, то их мы будем понимать в смысле теории алгебр 1-ой ступени (заметим, что эти конгруэнции будут те же, что и главные конгруэнции в смысле теории алгебр 2-ой ступени; поэтому решетку всех конгруэнций алгебры A обозначим через $Con^{\circ}(A)$). Если $\Phi\in Con^{\circ}(A)$, то через ε_Φ обозначим естественный гомоморфизм из алгебры A на факторалгебру A/Φ.

Пусть $\mathcal{M}$ - класс алгебр с одним и тем же арифметическим типом. Через $Th\,\mathcal{M}$ обозначим множество всех сверхтождеств, истинных во всех $\mathcal{M}$-алгебрах. Если $\mathcal{M}=$

$=\{A\}$, то вместо $Th\ \mathcal{M}$ будем писать $Th\ A$. Условимся под теорией понимать замкнутое (т. е. содержащее все свои следствия) множество сверхтождеств. В этом смысле $Th\ \mathcal{M}$ всегда является теорией.

Напомним, что класс алгебр $\mathcal{M}$ называется сверхмногообразием, если существует множество сверхтождеств Γ такое, что в $\mathcal{M}$ входят те и только те алгебры, в которых верны все сверхтождества из Γ; в этом случае говорим, что сверхмногообразие $\mathcal{M}$ определено сверхтождествами из Γ.

Идентичную функцию на множестве X будем обозначать через 1_X или id_X, $|X|$ означает мощность множества X, а через ■ будем обозначать конец доказательства или его отсутствие.

Будем рассматривать алгебры с арифметическим типом $\{1,2\}$. Такими являются булевы алгебры. Условимся обозначать предметные переменные через $x,y,z,...$, переменные бинарных операций - через $F,G,...$, а унарных - через $X,Y,...$

Определение 0.1. Сверхтождество, верное во всех булевых алгебрах, будем называть QB-тождеством. Алгебру, в которой верны все QB-тождества, назовем булевой квазирешеткой, а сверхмногообразие всех булевых квазирешеток обозначим через QB. В связи с этим вместо булевой квазирешетки будем чаще писать QB-алгебра.

Примеры QB- тождеств:

$(i)\ X(x)=Y(x)$ является QB-тождеством, поэтому в QB-алгебрах имеется только одна унарная операция, обозначаемая через -.

(ii) В силу QB-тождеств

$$F(x,XF(y,Xy))=x \quad (\text{"закон нуля"}) \text{ и} \tag{1}$$

$$F(x,y)=F(y,x) \quad (\text{коммутативность}), \tag{2}$$

для каждой QB-алгебры $A=\langle Q,\Sigma\rangle$ и $f,\ ^{-}\in\Sigma, n(f)=2, n(^{-})=1, a\in Q$ элемент $\overline{f(a,\bar{a})}$ является двусторонним нулевым элементом для f. Поэтому он единственен: $\overline{f(a,\bar{a})}=\overline{f(b,\bar{b})}$ для любых $a,b\in Q$ и $^{-}\in\Sigma, n(^{-})=1$. Обозначим этот элемент через Λ_f.

§1. В этом параграфе устанавливается связь между решетками конгруэнций и идеалами булевых квазирешеток.

Определение 1.1. Пусть $A=\langle Q,\Sigma\rangle\in QB$ и $f\in\Sigma, n(f)=2$. Непустое подмножество $I\subseteq Q$ назовем f-идеалом, если $f(x,y)\in I$ тогда и только тогда, когда $x,y\in I$.

Обозначим через $I_f(A)$ множество всех f-идеалов алгебры A.

Если I - f-идеал, то в силу (1) $\Lambda_f\in I$.

Лемма 1.2. Пусть $A=\langle Q,\Sigma\rangle\in QB$ и Φ - конгруэнция на A. Тогда $\mathfrak{I}_f(\Phi)=\Lambda_f^{\Phi}$ является f-идеалом для любой бинарной операции $f\in\Sigma$.

Доказательство. Во - первых, $\Lambda_f\in\Lambda_f^{\Phi}$, поэтому $\Lambda_f^{\Phi}\neq\varnothing$.

Пусть $x,y\in\Lambda_f^{\Phi}$. Это означает, что $x\Phi\Lambda_f$ и $y\Phi\Lambda_f$, поэтому $f(x,y)\Phi f(\Lambda_f,\Lambda_f)=\Lambda_f$ (с использованием (1)) или $f(x,y)\in\Lambda_f^{\Phi}$.

Пусть теперь $f(x,y)\in\Lambda_f^{\Phi}$, т. е. $f(x,y)\Phi\Lambda_f$. Используя (1), а также ассоциативность $F(x,F(y,z))=F(F(x,y),z)$ и . (3)

идемпотентность $F(x,x)=x$, (4)

получаем $x=f(x,\Lambda_f)\,\Phi\, f(x,f(x,y))=f(f(x,x),y)=f(x,y)\,\Phi\,\Lambda_f$, следовательно $x\in\Lambda_f^{\Phi}$. Аналогично, используя также коммутативность (2), получаем $y\in\Lambda_f^{\Phi}$. ■

Лемма 1.3. Пусть $A=\langle Q,\Sigma\rangle\in QB$, $f\in\Sigma, n(f)=2$ и пусть $I\subseteq Q$ является f-идеалом. Определим отношение $\Phi_f(I)$ на Q следующим способом:

$a\,\Phi_f(I)b$ тогда и только тогда, когда $f(a,I)\cap f(b,I)\neq\varnothing$.

Отношение $\Phi_f(I)$ является конгруэнцией на A.

Замечание. Под $f(a,I)$ подразумевается $\{f(a,x);x\in I\}$.

Доказательство. Сначала проверим, что $\Phi_f(I)$ (которое в доказательстве леммы будет для краткости обозначаться через~) является отношением эквивалентности. Рефлексивность и симметричность очевидны. Пусть $a\sim b$ и $b\sim c$, т. е. существуют $x,y,u,v\in I$ такие, что $f(a,x)=f(b,y)$ и $f(b,u)=f(c,v)$. Так как $f(x,u),f(v,y)\in I$, и в силу (2) и (3)

$$f(a,f(x,u))=f(f(a,x),u)=f(f(b,y),u)=f(b,f(y,u))=$$
$$=f(b,f(u,y))=f(f(b,u),y)=f(f(c,v),y)=f(c,f(v,y)),$$

получаем $a\sim c$.

Пусть $g\in\Sigma$ и $n(g)=2$. Пусть $a_1\sim a_2$ и $b_1\sim b_2$, докажем, что $g(a_1,b_1)\sim g(a_2,b_2)$. По определению ~, существуют $x,y,u,v\in I$ такие, что $f(a_1,x)=f(a_2,y)$ и $f(b_1,u)=f(b_2,v)$. Заметим, что x, y, u, v можем выбрать равными. Действительно, положим $w=f(x,f(y,f(u,v)))$, тогда $w\in I$, а с использованием ассоциативности, коммутативности и идемпотентности получаем

$$w=f(x,w)=f(y,w)=f(u,w)=f(v,w),$$

следовательно,

$$f(a_1,w)=f(a_1,f(x,w))=f(f(a_1,x),w)=f(f(a_2,y),w)=f(a_2,f(y,w))=f(a_2,w),$$

аналогично:

$$f(b_1,w)=f(b_2,w).$$

В силу же дистрибутивности

$$F(G(x,y),z)=G(F(x,z),F(y,z)) \quad (5)$$

имеем $f(g(a_1,b_1),w)=g(f(a_1,w),f(b_1,w))=g(f(a_2,w),f(b_2,w))=f(g(a_2,b_2),w)$, значит действительно $g(a_1,b_1)\sim g(a_2,b_2)$.

Возьмем теперь унарную операцию $\bar{\ }\in\Sigma$, и пусть $a_1\sim a_2$. Как и выше, можно взять $x\in I$ такое, что $f(a_1,x)=f(a_2,x)$. Пользуясь QB-тождеством

$$F(\overline{X}y,x)=F(\overline{XF(y,x)},x), \quad (6)$$

получаем

$$f(\overline{a_1},x)=f(\overline{f(a_1,x)},x)=f(\overline{f(a_2,x)},x)=f(\overline{a_2},x),$$

так что $\overline{a_1} \sim \overline{a_2}$.

Лемма доказана. ■

Таким образом, леммы 1.2 и 1.3 определяют отображения $\Im_f$ и Φ_f между алгебраическими решетками $I_f(A)$ и $Con^\circ(A)$. Их взаимосвязь указывает следующая

Теорема 1.4. Пусть $A = \langle Q, \Sigma \rangle \in QB$, $f \in \Sigma$ и $n(f)=2$. Тогда $\Im_f : Con^\circ(A) \to I_f(A)$ и $\Phi_f : I_f(A) \to Con^\circ(A)$ являются взаимно обратными изоморфизмами между этими решетками.

Доказательство. Докажем, что $\Im_f^\circ \Phi_f = 1_{I_f(A)}$ и $\Phi_f^\circ \Im_f = 1_{Con^\circ(A)}$. (*)

Пусть $I \in I_f(A)$, $\sim = \Phi_f(I)$. Согласно (1) и (2) $f\left(\Lambda_f, I\right) = I$, следовательно,

$$\Im_f(\sim) = \Lambda_f^{\sim} = \left\{a \in Q;\ \exists x \in I : f\left(a, x\right) \in I\right\} = I .$$

Этим первое равенство в (*) доказано.

Пусть теперь $\sim \in Con^\circ(A), I = \Im_f(\sim)$ и $\approx = \Phi_f(I)$. Надо доказать, что $\sim = \approx$.

Пусть $a \approx b$, это значит, что существуют $x \sim \Lambda_f$ и $y \sim \Lambda_f$ такие, что

$$f(a, x) = f(b, y) .$$

Тогда $a = f\left(a, \Lambda_f\right) \sim f\left(a, x\right) = f\left(b, y\right) \sim f\left(b, \Lambda_f\right) = b$ и из транзитивности $\sim$ получаем $a \sim b$.

Предположим, что $a \sim b$. Тогда для $\bar{\ } \in \Sigma, n\left(\bar{\ }\right) = 1$ имеем

$$\overline{f\left(a, \bar{b}\right)} \sim \overline{f\left(a, \bar{a}\right)} = \Lambda_f ,$$

$$\overline{f\left(\bar{a}, b\right)} \sim \overline{f\left(\bar{a}, a\right)} = \overline{f\left(a, \bar{a}\right)} = \Lambda_f ,$$

так что $\overline{f\left(a, \bar{b}\right)}, \overline{f\left(\bar{a}, b\right)} \in I$. Теперь, пользуясь QB- тождеством

$$X\left(X(x)\right) = x , \tag{7}$$

а также (2) и (6), получаем

$$f\left(b, \overline{f\left(\bar{a}, b\right)}\right) = f\left(\overline{f\left(\bar{a}, b\right)}, b\right) = f\left(\bar{\bar{a}}, b\right) = f\left(a, b\right) = f\left(\bar{\bar{b}}, a\right) = f\left(\overline{f\left(\bar{b}, a\right)}, a\right) = f\left(a, \overline{f\left(a, \bar{b}\right)}\right),$$

следовательно, $a \approx b$.

Этим (*) доказана и для завершения доказательства теоремы остается заметить, что для $I, J \in I_f\left(A\right)$, $I \subseteq J$ равносильно $\Phi_f(I) \subseteq \Phi_f(J)$. ■

§2. Сначала рассмотрим главные f-идеалы QB-алгебры $A = \langle Q, \Sigma \rangle$ (как всегда, $f \in \Sigma$ и $n(f) = 2$), т. е. f-идеалы, порожденные одной точкой. Нетрудно видеть, что $(a)_f = \left\{x \in Q;\ f\left(a, x\right) = a\right\}$ будет f-идеалом для любого $a \in Q$. Действительно, если $f\left(a, x\right) = a$ и $f\left(a, y\right) = a$, то в силу (3)

$$f(a,f(x,y))=f(f(a,x),y)=f(a,y)=a.$$

Если же $f(a,f(x,y))=a$, то, используя (2), (3) и (4), получаем

$$f(a,x)=f(f(a,f(x,y)),x)=f(a,f(f(y,x),x))=f(a,f(y,f(x,x)))=$$
$$=f(a,f(y,x))=f(a,f(x,y))=a,$$

аналогично получается $f(a,y)=a$.

В силу (4) $a\in(a)_f$. С другой стороны, если $a\in I\in I_f(A)$, то $(a)_f\subseteq I$. Получилось, что $(a)_f$ и есть главный f-идеал, порожденный точкой a. Чтобы избежать громоздких обозначений, будем вместо $\Phi_f((a)_f)$ писать $\overset{a}{\underset{f}{\sim}}$.

Замечание. Для дальнейших целей заметим, что $x\overset{a}{\underset{f}{\sim}}y$ тогда и только тогда, когда $f(a,x)=f(a,y)$, т. е. классы эквивалентности $\overset{a}{\underset{f}{\sim}}$ определяются их наибольшими членами относительно порядка $u\le_f \mathrm{v}\Leftrightarrow \mathrm{f(u,v)=v}$. Заметим еще, что если $b\in Q$ определяет класс эквивалентности $\overset{a}{\underset{f}{\sim}}$ (это просто значит, что существует $x\in Q$ такой, что $b=f(a,x)$), то $a\le_f b$ и обратно. Таким образом, фактор-алгебра $A/\overset{a}{\underset{f}{\sim}}$ изоморфна главному фильтру, порожденному элементом а (с унарной операцией $b'=f(\overline{b},a)$).

Обозначим через $B_2=\langle\{0,1\};+,\bullet,\bar{\ }\rangle$ двухэлементную булеву алгебру, а через B_2^+ - ее полуподалгебру $\langle\{0,1\};+,\bar{\ }\rangle$. Пусть QB^+ - класс всех функционально тривиальных QB-алгебр.

Л е м м а 2.1. Единственными нетривиальными подпрямо неразложимыми QB-алгебрами являются B_2 и B_2^+, а единственной нетривиальной подпрямо неразложимой QB^+-алгеброй является B_2^+.

Доказательство. Очевидно, что B_2 и B_2^+ являются подпрямо неразложимыми.

Пусть $A=\langle Q,\Sigma\rangle\in QB$ и $|Q|\ge 3$. Выберем $f,\bar{\ }\in\Sigma$ с $n(f)=2$ и $n(\bar{\ })=1$. Существует $a\in Q$, отличный от Λ_f и $\overline{\Lambda}_f$. Согласно (7), $\overline{a}\ne\Lambda_f$, поэтому $(a)_f$ и $(\overline{a})_f$ ненулевые f-идеалы.Предположим, что $x\in(a)_f\cap(\overline{a})_f$. Согласно QB-тождеству

$$x=XF(XF(x,y),XF(x,Xy)) \tag{8}$$

имеем $x=\overline{f(\overline{f(x,a)},\overline{f(x,\overline{a})})}=\overline{f(\overline{a},\overline{\overline{a}})}=\Lambda_f$. Следовательно, $(a)_f\cap(\overline{a})_f=\{\Lambda_f\}$ и A не является подпрямо неразложимой.

Предположим теперь, что $|Q|=2$, скажем, $Q=\{a,b\}$. На Q существуют две коммутативные и идемпотентные бинарные операции:

$$\begin{array}{c|cc} \vee & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & b \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c|cc} \wedge & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & a & b \end{array}.$$

Унарных операций, удовлетворяющих (7), тоже две: id_Q и $\bar{\ }: a \leftrightarrow b$. Однако, если $id_Q \in \Sigma$, то для любой $f \in \Sigma, n(f) = 2$ имеем

$$x = f(x,x) = f\left(x, id_Q(x)\right) = id_Q\left(f\left(x, id_Q(x)\right)\right) = \Lambda_f$$

для каждого элемента $x \in Q$, а это противоречит тому, что Q двухточечно. Следовательно, единственной унарной операцией A является $\bar{\ }$. Остается заметить, что если $\vee, \wedge \in \Sigma$, то $A \cong B_2$, если же $\vee \in \Sigma, \wedge \notin \Sigma$ или $\wedge \in \Sigma, \vee \notin \Sigma$, то $A \cong B_2^+$.

Лемма доказана. ■

Согласно теореме о представлении алгебры в качестве подпрямого произведения подпрямо неразложимых алгебр и с использованием того факта, что сверхмногообразия замкнуты по гомоморфным образам, получаем, что каждая QB-алгебра является подпрямым произведением изоморфных копий B_2 и B_2^+. Отсюда ясно, что QB-алгебрами являются в точности подалгебры прямых степеней B_2.

Заметим, что любое сверхмногообразие однозначно определяется своими подпрямо неразложимыми алгебрами как класс всех подпрямых произведений этих алгебр.

Теперь приведем два следствия из леммы 2.1.

Следствие 2.2. Сверхмногообразие QB определяется QB-тождествами (1)- (8). Иначе говоря, сверхтождества (1)-(8) являются базой всех QB-тождеств.

Замечание. В [3] характеризуются QB-тождества и получена несколько иная база.

Следствие 2.3. $Th\ QB = Th\ A$ для любой функционально нетривиальной $A \in QB$. В частности, сверхтождество является QB-тождеством тогда и только тогда, когда оно истинно в B_2.

Ясно, что сверхмногообразие QB^+ в QB характеризуется сверхтождеством

$$F(x,y) = G(x,y). \tag{9}$$

Теорема 2.4. Единственным нетривиальным собственным подсверхмногообразием QB есть QB^+, и $Th\ QB^+ = Th\ A$, где A - любая нетривиальная QB^+- алгебра. В частности, $Th\ QB^+ = Th\ B_2^+$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ - какое-то сверхмногообразие, в котором верны сверхтождества (1)-(8). Заметим, что до сих пор в доказательствах мы пользовались только этими сверхтождествами и, следовательно, леммы 1.2, 1.3, 2.1 и теорема 1.4 верны и в $\mathcal{M}$. Значит, подпрямо неразложимыми $\mathcal{M}$-алгебрами могут являться, кроме тривиальной алгебры, B_2 и B_2^+. Если $B_2^+ \notin \mathcal{M}$ и, следовательно, $B_2 \notin \mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ - тривиальное сверхмногообразие. Если $B_2^+ \in \mathcal{M}, B_2 \notin \mathcal{M}$, то $\mathcal{M} = QB^+$. Если же $B_2^+, B_2 \in \mathcal{M}$, то $\mathcal{M} = QB$.

Возьмем теперь нетривиальную QB-алгебру A. Так как $Th\ QB \subseteq Th\ A$, то сверхмногообразие $\mathcal{M}$, определенное $Th\ A$, является нетривиальным подсверхмногообразием QB. Поэтому или $\mathcal{M}\models QB$, а это значит, что $Th\ A = Th\ QB$ и A функционально нетривиальна, или $\mathcal{M}\models QB^+$, в этом случае $Th\ A = Th\ QB^+$ и A функционально тривиальна.■ .

Первую часть теоремы 2.4 можно сформулировать следующим образом: QB является минимальным строго нетривиальным, а QB^+ - минимальным нетривиальным сверхмногообразием.

§3. Вспомним, что в QB-алгебрах унарная операция единственна, и будем ее обозначать, как и раньше через $\bar{\ }$.

3.1. Если $A = \langle Q, \Sigma \rangle \in QB, |Q| \geq 3$ и $a \in Q$ отлично от Λ_f и $\overline{\Lambda}_f$ для фиксированной бинарной операции $f \in \Sigma$, то $A_1 = A/(a)_f$ и $A_2 = A/(\bar{a})_f$ есть нетривиальные QB-алгебры. Рассмотрим произведение естественных гомоморфизмов

$$\varepsilon = \varepsilon_{(a)_f} \times \varepsilon_{(\bar{a})_f} : A \to A_1 \times A_2 : x \mapsto \left(x^{\tilde{\tilde{f}}}, x^{\bar{\tilde{\tilde{f}}}} \right).$$

Пусть $(B, C) \in A_1 \times A_2$ и пусть наибольшие члены B и C суть соответственно b и c, т.е. $x \in B \Leftrightarrow f(x, a) = b$ и $y \in C \Leftrightarrow f(y, \bar{a}) = c$. В силу QB-тождеств

$$F\left(x, X\left(\Lambda_f\right)\right) = X\left(\Lambda_f\right) \text{ и}$$

$$F\left(XF(Xx, Xy), z\right) = XF\left(XF(x, z), XF(y, z)\right)$$

получаем

$$f\left(\overline{f\left(\bar{b}, \bar{c}\right)}, a\right) = \overline{f\left(\overline{f(b,a)}, \overline{f(c,a)}\right)} = \overline{f\left(\bar{b}, \overline{f\left(\overline{f\left(c, \bar{a}\right)}, a\right)}\right)} = \overline{f\left(\bar{b}, \overline{f\left(c, \overline{\Lambda_f}\right)}\right)} = \overline{f\left(\bar{b}, \Lambda_f\right)} = b;$$

аналогично получаем $f\left(\overline{f\left(\bar{b}, \bar{c}\right)}, \bar{a}\right) = c$. Выходит, что $\overline{f\left(\bar{b}, \bar{c}\right)} \in B \cap C$, поэтому $\varepsilon\left(\overline{f\left(\bar{b}, \bar{c}\right)}\right) = (B, C)$ и ε -полуэпиморфизм. Если же $x \in B \cap C$, то (8) сразу дает

$$x = \overline{f\left(\overline{f(x,a)}, \overline{f\left(x, \bar{a}\right)}\right)} = \overline{f\left(\bar{b}, \bar{c}\right)},$$

так что ε - мономорфизм и, следовательно, полуизоморфизм.

Получилось, что каждая QB-алгебра с более чем двумя элементами является полупрямым произведением двух нетривиальных QB-алгебр. В частности, любая конечная QB-алгебра является полупрямой степенью B_2.

3.2. Из предыдущего замечания следует, что для любой конечной QB-алгебры $\langle Q, \Sigma \rangle$ имеет место $|\Sigma| \leq |Q| + 1$.

Пусть QB-алгебра $A = \langle Q, \Sigma \rangle$ является подпрямым произведением QB-алгебр $\left\{A_i\right\}_{i \in I} = \left\{\langle Q_i, \Sigma_i \rangle\right\}_{i \in I}$. Тогда для любых $f_i \in \Sigma_i, n\left(f_i\right) = 2$ имеем $\Lambda_{\left\{f_i\right\}} = \left\{\Lambda_{f_i}\right\}$ (если, конечно, $\left\{f_i\right\} \in \Sigma$). Действительно, для любого $i_0 \in I$ существует $\left\{a_i\right\} \in Q$ такое, что $a_{i_0} = \Lambda_{f_{i_0}}$. Следовательно,

$$\Lambda_{f_{i_0}}=\left(\{a_i\}\right)_{i_0}=\left(\{f_i\}\left(\{a_i\},\Lambda_{\{f_i\}}\right)\right)_{i_0}=f_{i_0}\left(a_{i_0},\left(\Lambda_{\{f_i\}}\right)_{i_0}\right)=\left(\Lambda_{\{f_i\}}\right)_{i_0}.$$

Равенство $\Lambda_{\{f_i\}}=\left\{\Lambda_{f_i}\right\}$ доказано.

Теперь заметим, что в B_2 и B_2^+ каждая бинарная операция однозначно определяется своим нулем. Поэтому, если все A_i суть B_2 или B_2^+, то любая бинарная операция алгебры A однозначно определяется своим нулем (т. е. разные операции имеют разные нули) в силу вышеприведенного равенства. Этим же доказано, что для бесконечных Q имеет место неравенство $|\Sigma|\le|Q|$.

3.3. Из замечания 3.1. следует, что каждая конечная QB-алгебра состоит из 2^k элементов $(k\in N)$. Это можно получить из аналогичного факта для булевых алгебр с помощью более простых соображений.

Пусть $A=\langle Q,\Sigma\rangle\in QB$. Для любой бинарной операции $f\in\Sigma$ определим сопряженную операцию f^* следующим образом:

$$f^*(x,y)=\overline{f(\overline{x},\overline{y})} \text{ для любых } x,y\in Q.$$

Алгебра $A'=\langle Q,\Sigma\cup\left\{f^*;f\in\Sigma,n(f)=2\right\}\rangle$ снова будет QB-алгеброй, потому что каждое QB-тождество остается QB-тождеством, если заменить несколько бинарных операций их сопряженными (достаточно проверить это для (1)-(8)). А для любой $f\in\Sigma,n(f)=2$ алгебра $A''=\langle Q;f,f^*,\bar{\ }\rangle$ является булевой алгеброй.

В частности, любая функционально тривиальная QB-алгебра (т.е. любая QB^+-алгебра) является полуподалгеброй булевой алгебры.

3.4. Булевы алгебры можно рассматривать и как алгебры с арифметическим типом {0, 1, 2}, с 0-арными операциями 0 и 1. Однако 0-арные операции не влияют на конгруэнции и, следовательно, в нашей работе не играют никакой роли. Точнее, этих операций может быть сколько угодно, и они могут принимать любые значения; сверхтождество с 0-арными операциями верно во всех булевых алгебрах тогда и только тогда, когда оно является QB-тождеством, если рассмотреть переменные таких операций как предметные переменные.

3.5. Теорию T (сверхмногообразие $\mathcal{M}$) назовем одноосновaнной, если T (соответственно $Th\ \mathcal{M}$) имеет базу, состоящую из одного сверхтождества.

Интересно, что оба сверхмногообразия QB и QB^+ являются одноосновaнными. Чтобы показать это, нам понадобится следующий факт.

Теорема 3.1. (ср. [4], Theorem 1.2). Пусть Θ - теория. Предположим, что для какого-то терма $\tau(x_1,\ldots,x_k)$ $(k\ge2)$ Θ содержит все следующие сверхтождества:

$$x=\tau(y,x,\ldots,x),\ x=\tau(x,y,x,\ldots,x),\ x=\tau(x,\ldots,x,y).$$

Предположим еще, что Θ имеет конечную базу, состоящую из сверхтождеств вида $x=\sigma$. В этом случае Θ одноосновaнно.■

Проверим условия теоремы для теорий $QB=Th\ QB$ и $QB^+=Th\ QB^+_*$ (теория булевых квазирешеток и теория функционально тривиальных булевых квазирешеток). Заметим, что имея QB-тождества (1), (7), (8),

$$x=F(XF(y,Xy),x) \text{ и} \tag{1'}$$

$$x = XF\big(XF(y,x), XF(Xy,x)\big), \tag{8'}$$

любое сверхтождество $w_1 = w_2$ можно эквивалентно представить с помощью сверхтождеств

$$x = F\big(XF(w_1, Xw_2), x\big) \quad \text{и}$$

$$x = F\big(x, XF(Xw_1, w_2)\big),$$

с условием, что x не входит в w_1 и w_2. Поэтому QB и QB^+ имеют базы, состоящие соответственно из 14 и 16 сверхтождеств вида $x = \sigma$. Вместо τ же можем взять терм $F\Big(XF(Xx, Xy), F\big(XF(Xy, Xz), XF(Xz, Xx)\big)\Big)$. Вышеприведенная теорема теперь дает желаемый результат.

Кафедра алгебры и геометрии ЕГУ

Поступила 20.09.1996

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мальцев А.И.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
2. **Мовсисян Ю.М.** Введение в теорию алгебр со сверхтождествами.Изд-во ЕГУ, 1986 .
3. **Мовсисян Ю.М.** Сверхтождества булевых алгебр. Изд-во РАН, сер. математическая,1992, т. 56, № 3, с. 654-672.
4. **McKenzie R.N.** Equational bases for lattice theories.Math. Scand., 1970, v. 27, p. 24-38.
5. **Kalman J.A.** Subdirect decomposition of distributive quasilattices. Fund. Math.,1971, t. LXXI, p. 161-163.
6. **Мовсисян Ю.М.** Алгебры со сверхтождествами многообразия булевых алгебр. - Изв. РАН, серия математическая, 1996, № 6, с. 127-168.

ՅՈՒ. Մ.ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ, Ա.Գ.ԲԱՐԽՈՒԴԱՐՅԱՆ

QB-ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐԻ ԳԵՐԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում շարունակվում են ([6] -ում սկսված) հետազոտությունները այն հանրահաշիվների, որոնք բավարարում են բուլյան հանրահաշիվների գերնույնություններին:

Նկարագրվում են այդպիսի հանրահաշիվների կոնգրուէնցիաների, ինչպես նաև գերբազմաձևությունների կավարները: