ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1993 Естественные науки

Механика

УДК 531.36:62-50

Л.С. СААКЯН

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ УСЛОВИИ МИНИМУМА ЕЕ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ

Рассматривается задача об оптимальном управлении осесимметричными колебаниями круглой пластинки, зажатой по контуру, при помощи внешних сил, распределенных по всей ее площади. В процессе управления минимизируется полная энергия пластинки.

Задача оптимального управления сводится к изопериметрической задаче вариационного исчисления, для которой, как показано, выполнены достаточные условия сильного минимума.

1. Пусть на пластинку, которая зажата по контуру, действует нормально распределенная внешняя нагрузка с плотностью $f(t,r)$. Тогда динамический прогиб $W(t,r)$ будет определяться как решение дифференциального уравнения упругой поверхности [1].

$$b^4\Delta\Delta W+\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=f(t,r),\qquad \Delta=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) \tag{1.1}$$

при граничных

$$W(t,r)\big|_{r=a}=0,\qquad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{r=a}=0,\qquad t\geqslant 0, \tag{1.2}$$

и заданных начальных условиях

$$W(t,r)\big|_{t=0}=\varphi(r),\qquad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi((r),\qquad 0\leqslant r\leqslant a. \tag{1.3}$$

В (1.1) $b^4=D/\gamma h$, D — цилиндрическая жесткость, γ — плотность, h — толщина пластинки.

Решение уравнения (1.1) будем искать в форме ряда

$$W(t,r)=\sum_{m=1}^{\infty}W_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|},\qquad W_m=\frac{1}{\|R_m\|}\int_0^a W(t,r)R_m(r)rdr,\tag{1.4}$$

где $R_m(r)$ — собственные функции однородной краевой задачи (1.1), (1.2),

$$R_m(r)=I_0(\nu_m)J_0\left(\frac{r}{a}\nu_m\right)-J_0(\nu_m)I_0\left(\frac{r}{a}\nu_m\right),\qquad m=1,2,\cdots,$$

а собственные числа $\tilde{\lambda}_m=(\nu_m/a)^4$ — корни трансцендентного уравнения

$$R_m'(a)=I_0(\nu_m)\cdot J_0'(\nu_m)-J_0(\nu_m)I_0'(\nu_m)=0,\qquad m=1,2,\cdots$$

Подставляя решение (1.4) в (1.1), умножая последнее на $rR_m(r)/\|R_m\|$ и интегрируя по r от нуля до a, получим

$$\ddot{W}_m+\frac{D}{\rho h}\tilde{\lambda}_m W_m=\frac{1}{\|R_m\|}\int_0^a f(t,r)R_m(r)rdr=u_m(t),\qquad m=1,2,\cdots\tag{1.5}$$

Из (1.3), (1.4) следует также

$$\varphi_m=W_m(0)=\frac{1}{\|R_m\|}\int_0^a\varphi(r)R_m(r)rdr,\qquad \psi_m=\dot{W}_m(0)=\frac{1}{\|R_m\|}\int_0^a\psi(r)R_m(r)rdr.\tag{1.6}$$

Предположим, что $f(t,r)\in L_2((0,T)\times(0,a))$ и допускает разложение

$$f(t,r)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|}.\tag{1.7}$$

Кинетическая и потенциальная энергии пластинки равны [1]:

$$T=\frac{\rho h}{2}\int_0^T\int_0^a\int_0^{2\pi}r\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2drd\varphi dt=\pi\rho h\int_0^T\int_0^a\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2rdrdt=$$

$$=\pi\rho h\int_0^T\int_0^a\left(\sum_{m=1}^{\infty}\dot{W}_m\frac{R_m(r)}{\|R_m\|}\right)^2rdrdt=\frac{\rho h}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^T\dot{W}_m^2(t)dt,$$

$$\Pi=\pi D\int_0^T\int_0^a\left[\left(\frac{\partial^2W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+2(1-\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right]rdrdt=$$

$$=\pi D\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^T\frac{W_m^2(t)}{\|R_m\|^2}dt\int_0^a\left(\frac{d^2R_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_m}{dr}\right)^2rdr=\frac{D}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^T\frac{\nu_m^4}{a^4}W_m^2(t)dt,$$

$$E=T+\Pi=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\rho h}{2}\int_0^T\dot{W}_m^2(t)dt+\frac{D}{2}\left(\frac{\nu_m}{a}\right)^4\int_0^T W_m^2(t)dt\right].$$

Рассмотрим функционал

$$J=\frac{\rho h}{2}\int_0^T\int_0^a\int_0^{2\pi} f^2(t,r)rdrd\varphi dt=\frac{\rho h}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^T u_m^2(t)dt,$$

тогда полная энергия пластинки будет

$$H=E+J=\frac{\rho h}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^T[\dot{W}_m^2(t)+\frac{D}{\rho h}\tilde{\lambda}_m W_m^2(t)+u_m^2(t)]dt=\frac{\rho h}{2}\sum_{m=1}^{\infty}H_m. \qquad (1.8)$$

Задача. Определить $f(t,r)$ так, чтобы при некотором конечном T пластинку из заданного состояния (1.3) перевести в состояние

$$W(T,r)=0, \qquad \dot{W}_t(T,r)=0 \qquad (1.9)$$

с соблюдением граничных условий (1.2), минимизировав при этом функционал (1.8), характеризующий полную энергию пластинки.

Поставленная задача эквивалентна задаче оптимального управления системы (1.5), (1.6) с функционалом

$$H_m=\int_0^T(\dot{W}_m^2+\lambda_m^2W_m^2+u_m^2)dt, \qquad \lambda_m^2=\frac{D}{\rho h}\tilde{\lambda}_m \qquad (1.10)$$

и условиями $W_m(T)=0$, $\dot{W}_m(T)=0$ для всех $m=\overline{1,\infty}$.

Подставим выражение (1.5) для u_m в функционал (1.10)

$$H_m=\int_0^T[\dot{W}_m^2+\lambda_m^2W_m^2+(\ddot{W}_m+\lambda_m^2W_m)^2]dt=\int_0^T F_m(W_m,\dot{W}_m,\ddot{W}_m)dt \qquad (1.11)$$

и вместо соответствующей задачи оптимального управления рассмотрим задачу на экстремум функционала (1.11) при следующих закрепленных граничных условиях:

$$W_m(0)=\varphi_m, \quad \dot{W}_m(0)=\psi_m, \quad W_m(T)=0, \quad \dot{W}_m(T)=0. \qquad (1.12)$$

Необходимое условие экстремума приводит к уравнению Эйлера-Пуассона [2]

$$\ddddot{W}_m+(2\lambda_m^2-1)\ddot{W}_m+\lambda_m^2(\lambda_m^2+1)W_m=0, \qquad (1.13)$$

которое совпадает с уравнением (2.3) в [2].

Пусть параметры, характеризующие пластинку, таковы, что

$$\Theta(\sigma,E,\rho,h,a)=\frac{6\rho(1-\sigma^2)a^4}{E\nu_1^4h^2}<1,$$

где ν_1 — корень уравнения $R_1'(a)=0$.

Тогда все остальные рассуждения для вычисления экстремали и проверки достаточных условий минимума функционала (1.11) аналогичны [2].

Функция

$$W_m(t)=[(e^{\alpha_m t}-e^{-\alpha_m t})\cos\beta_m t-2\frac{\alpha_m}{\beta_m}\sin\beta_m t\cdot e^{-\alpha_m t}]\cdot c_1^{(m)}+$$

$$+[(e^{\alpha_m t}-e^{-\alpha_m t})\sin\beta_m t]c_2^{(m)}+\varphi_m\cdot e^{-\alpha_m t}\cdot\cos\beta_m t+$$

$$+\frac{\alpha_m\varphi_m+\psi_m}{\beta_m}\cdot e^{-\alpha_m t}\cdot\sin\beta_m t \qquad (1.14)$$

является экстремалью для функционала (1.11), (1.12) и доставляет ей сильный минимум, а оптимальное управление $u_m^0(t)$ определяется формулой

$$u_m^0(t)=\ddot{W}_m(t)+\lambda_m^2 W_m(t). \qquad (1.15)$$

2. Докажем равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(u_m^0)^2$.

Из (1.14), (1.15) следует, что

$$|u_m(t)|<M_1\nu_m^4(|\varphi_m|+|\psi_m|).$$

Следовательно, из сходимости рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty}\nu_m^8\varphi_m^2,\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\nu_m^8\psi_m^2 \qquad (2.1)$$

будет следовать равномерная сходимость искомого ряда, а также рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty}W_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|},\quad \sum_{m=1}^{\infty}\dot{W}_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|},\quad \sum_{m=1}^{\infty}\ddot{W}_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|}.$$

Пусть $\Delta\Delta W\in L_2$. Тогда из представления

$$\Delta\Delta W=\sum_{m=1}^{\infty}\nu_m^2 W_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|}$$

и из оценки $|W_m(t)|<M_2(|\varphi_m|+|\psi_m|)$ следует сходимость рядов (2.1) [3].

Кафедра теоретической механики

Поступила 16.09.1991

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. ОГИЗ. М.: Гостехиздат, 1947.
2. Саакян Л.С. Об оптимальном управлении колебаниями ортотропной прямоугольной пластинки при условии минимума ее полной энергии. Изв. Ан Арм. ССР, Механика, 1992, т. 45, № 3.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Լ.Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ՆՐԱ ԼՐԻՎ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ՄԻՆԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկված է ամրացված եզրերով կլոր սալի առանցքասիմետրիկ տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը նրա վերին մակերևույթի վրա կիրառված արտաքին ուժերի միջոցով: Ղեկավարման ընթացքում մինիմալացվում է սալի ամբողջ էներգիան:

Օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը բերվում է վարիացիոն հաշվի իզոպերիմետրիկ խնդրին, որի համար, ինչպես ցույց է տրված, կատարված են ուժեղ մինիմումի բավարար պայմանները:

Y.S. SAHAKIAN

ON THE OPTIMAL CONTROL OF OSCILLATIONS OF A ROUND AXLESYMMETRIC PLATE IN CONDITION OF THE MINIMUM OF ITS FULL ENERGY

Summary

The problem of optimal control of axlesymmetric oscillations of a round plate with fixed edges is studied with the help of external forces, spread over its surface. During the control process the full energy of the plate is brought to minimum. The control problem is replaced by the variation problem, for which, as it is shown, sufficient conditions of strong minimum are carried out.