ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1988 Естественные науки

Математика

УДК 519.216.3

Н. Х. МЕСРОПЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБНОВЛЯЮЩЕГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ПРОЦЕССА НЕПОЛНОГО РАНГА

Рассматривается стационарный на [O, T] процесс неполного ранга. Исследуются условия, при которых этот процесс имеет единственный обновляющий процесс начиная с некоторого места.

В [1] были даны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы размерность обновляющего процесса для процесса $z(t)=(x(t), y(t))$ ранга 1 была равна единице. Ниже на спектральном языке исследуются условия, при которых процесс $(x(t), y(t))$ ранга 1 имеет единственный обновляющий процесс начиная с некоторого места.

Дадим сначала определение кратности цепочки подпространств. Пусть имеется цепочка непрерывных слева подпространств H_0^t гильбертова пространства H такая, что $H_0^t \supset H_0^s$, $t>s$. Тогда, по [2], существуют такая борелевская мера $\mu(t)$, μ—измеримая функция $n(t)$ $(n(t)=0, 1, 2, \cdots)$ и унитарная изометрия $V: H \to Q$, где Q—прямой интеграл: $Q=\int H(t)\,d\mu(t)$, $\dim H(t)=n(t)$, что

$$VH_0^t=\int\limits_{[0,t]} H(s)\,d\mu(s).$$

По цепочке H_0^t однозначно определяются тип меры $\mu(t)$ и функция $n(t)$ (μ-почти всюду). Функция n называется функцией кратности цепочки, а величина $n(t)$, определенная μ-почти всюду, называется кратностью цепочки в точке t.

Пусть $z(t)=(x(t), y(t))$, $t\in[0, T]$—стационарный процесс с компонентами, имеющими нулевые средние и конечные вторые моменты.

Обозначим через $H_0^t(z)$ замкнутую в среднем квадратичном линейную оболочку всех значений $x(s), y(s), 0\leqslant s\leqslant t$, а через $H_{[0,T]}=H_{[0,T]}(z)=\overline{\bigcup\limits_{t\in[0,T]} H_0^t(z)}$. Ясно, что $H_0^s(z)\subseteq H_0^t(z)$, $s\leqslant t$, $0\leqslant s$, $t\leqslant T$. Спектральную плотность процесса $x(t)$ обозначим через $f_x(\lambda)$, а процесса $(x(t), y(t))$—через $f_{xy}(\lambda)$ [3].

Теорема. Пусть ранг стационарного процесса $(x(t), y(t))$, $t\in[0, T]$, равен единице и пусть коэффициент когерентности $\dfrac{f_{xy}(\lambda)}{f_x(\lambda)}$ представляется в виде отношения двух целых функций степени не выше s: $\dfrac{f_{xy}(\lambda)}{f_x(\lambda)}=\dfrac{\gamma(\lambda)}{r(\lambda)}$. Тогда кратность $n(t)$ процесса $(x(t), y(t))$, рассматриваемого на $[0, T]$ с некоторого места $t>3s$, равна единице.

Доказательство. Рассмотрим пространство $H=\mathcal{L}\{g;\ g=\varphi\gamma+\psi r\}$— пространство Бранже [4]. Здесь $\gamma(z)$ и $r(z)$—целые функции степени не выше s, а φ и $\psi\in H_0{}^t$. В силу того, что $\gamma H_0{}^t\subset H_0{}^{t+s}$ и $\gamma H_0{}^t\subset\pi_\gamma H_+{}^2$, где π_γ—произведение Бляшке, построенное по нулям функции $\gamma(z)$, а $H_+{}^2$—пространство Харди в верхней полуплоскости [5], пространства $\gamma H_0{}^t$ и $rH_0{}^t$ можно представить в виде

$$\gamma H_0{}^t=H_0{}^{t+s}\cap\pi_\gamma H_+{}^2,$$

$$rH_0{}^t=H_0{}^{t+s}\cap\pi_r H_+{}^2,$$

где π_r (π_γ)—произведение Бляшке,, построенное по нулям функции $r(z)$, $(\gamma(z))$.

Обозначим

$$L_t=\mathcal{L}\{(H_0{}^{t+s}\cap\pi_\gamma H_+{}^2)\cup(H_0{}^{t+s}\cap\pi_r H_+{}^2)\}.$$

Тогда

$$L_t{}^\perp=\mathcal{L}\{(H_0{}^{t+s}\cap\pi_\gamma H_+{}^2)^\perp\cap(H_0{}^{t+s}\cap\pi_r H_+{}^2)^\perp\}.$$

Рассмотрим пространство $L_\gamma=\mathcal{L}\{H_0{}^{t+s}\cap\pi_\gamma H_+{}^2\}^\perp$. По [1],

$$L_\gamma=\overline{L}\{H_0^{t+s}\cap H_+^2\}^\perp=\overline{L}\{\varepsilon_{t+s}H_+^2\cup D_{\kappa\gamma}\}=$$

$$=\varepsilon_{t+s}H_+^2\oplus\{L_\gamma\ominus\varepsilon_{t+s}H_+^2\}=\varepsilon_{t+s}H_+^2\oplus\overline{\{D_{\kappa\gamma}\cap H_0^{t+s}\}},$$

где $\varepsilon_s=e^{is\lambda}$.

Аналогично

$$\overline{L}\{H_0^{t+s}\cap\pi_r H_+^2\}^\perp=\varepsilon_{t+s}H_+^2\oplus\overline{\{D_{\kappa r}\cap H_0^{t+s}\}}.$$

Следовательно,

$$L_t^\perp=\varepsilon_{t+s}H_+^2\oplus\overline{\{D_{\kappa r}\cap D_{\kappa\gamma}\cap H_0^{t+s}\}}.$$

Обозначим через D подпространство $H_0{}^{2s}$, на котором задан оператор $\hat{g}=\gamma r$. Так как $\gamma D_\kappa\subset H_0{}^s$, $C\subset H_0{}^{2s}$, то $\hat{g}D\subset H_0{}^{2s}$. Тогда $H_0{}^{2s}\cap D_{\kappa r}\cap D_{\kappa\gamma}\subset D$.

Пусть $g(z)$—внешняя функция такая, что $|g|=|\hat{g}|^2$, и пусть $\varphi_1\in\in D_{\kappa r}\cap D_{\kappa\gamma}$. Функция $g\varphi_1$—целая степени не выше $2s$, кроме того, $\varphi_1 g\in\in L^2_{1/|g|^2}$, $\varphi_1 g\in H^{2s}_{1/|g|^2}$.

Рассмотрим

$$g[D_{\kappa r}\cap D_{\kappa\gamma}\cap H_0^{t+s}]=g\ [D_{\kappa r}\cap D_{\kappa\gamma}]\cap gH_0^{s+t}.$$

Ясно, что

$$gH_0^{t+s}=H_{1/|g|^2}^{t+s+\text{степень } g},$$

а

$$g(D_{\kappa r}\cap D_{\kappa\gamma})\subset H_{1/|g|^2}^{\text{степень } g}$$

степень $g<4s$. Следовательно, при $t>3s$

$$\overline{D_{\kappa r}\cap D_{\kappa\gamma}\cap H_0^{t+s}}=\overline{D_{\kappa r}\cap D_{\kappa\gamma}\cap H_0^{\text{степень } g}}. \qquad (1)$$

Так как

$$L_t = L\{\gamma H_0^t + r H_\theta^t\},\ \text{то при}\ t > 3s$$

$$L_t^{\perp} = \varepsilon_{t+s} H^2 \oplus D,$$

где $D = \{D_{\kappa r} \cap D_{\kappa\gamma} \cap H_0^{s+t}\}$ не зависит от t, как это следует из (1) при $t > 3s$. Кратность $\{L_t^{\perp}\}_s^{\infty}$ равна кратности $\{L_t^{\perp} \ominus \bigcap_t L_t^{\perp}\}_s^{\infty} = \{\varepsilon_{t+s} H_+^2\}$.

Кратность последнего есть единица. Значит, начиная с $t > 3s$ существует единственный обновляющий процесс. Теорема доказана.

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики

Поступила 11.05.1987

ЛИТЕРАТУРА

1. **Месропян Н. Х.** О кратности обновляющих процессов.—Уч. запис. ЕГУ, 1987, № 2.
2. **Наймарк М. А.** Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
3. **Розанов Ю. А.** Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963.
4. **L. de Brandes.** Hilbert spaces of entire functions. N.-Y., 1968.
5. **Гофман К.** Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ., 1963.

Ամփոփում

Դիտարկվում է [O,T]-ում ոչ լրիվ ռանգ ունեցող ստացիոնար z(t) պրոցեսը։ Նրա սպեկտրալ խտության միջոցով ուսումնասիրվում են այն անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, որոնց դեպքում z(t)-ի նորոգող պրոցեսը որոշ տեղից սկսած կլինի միակը։

SUMMARY

For the stationary process of incomplete rang the conditions for the unique innovation process existence are proposed.