ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1988 Естественные науки

Математика

УДК 517.98

Г. А. КАРАПЕТЯН

ГЛАДКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРА РЕШЕНИЙ РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе доказывается гладкая зависимость от параметра λ решений одного класса гипоэллиптических уравнений. В частности доказывается следующее. Пусть имеем уравнение $P(\lambda, D)U=f$. Обозначим через $N(\lambda)$ множество всех решений уравнения $PU=0$ из класса $W_2^H(R^n)$. Если размерность $N(\lambda)$ не зависит от λ, то любое решение уравнения $PU=f$, ортогональное $N(\lambda)$ в $L_2(R^n)$, бесконечно дифференцируемо по (x, λ).

Используем следующие обозначения: R^n—n-мерное евклидово пространство, Z_+^n—множество мультииндексов. Если $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in R^n$, $\alpha\in Z_+^n$, то положим $|\alpha|=\sum_{j=1}^n \alpha_j$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, где $D_k=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$. Пусть имеем набор мультииндексов $A=\{e^1, \ldots, e^N\}$. Характеристическим многогранником для данного набора $\{e^1, \ldots, e^N\}$ называется наименьший выпуклый многогранник H, содержащий все точки A. Многогранник H называется вполне правильным, если а) H имеет координаты на всех координатных осях и в начале координат, б) координаты внешних нормалей всех $(n-1)$-мерных некоординатных граней положительны.

При $t\in R^+$ положим $tH=\{\alpha t, \alpha\in H\}$.

В R^n рассмотрим следующий линейный дифференциальный оператор:

$$P(\lambda,D)=\sum_{\alpha\in H}a_\alpha(\lambda)D^\alpha, \tag{1.1}$$

где коэффициенты $a_\alpha(\lambda)$—бесконечно дифференцируемые функции от λ в $\overline{M}$, где M—ограниченная односвязная область в R^r, H—вполне правильный многогранник.

Рассмотрим уравнение

$$P(\lambda, D)u(x, \lambda)=f(x, \lambda), \tag{1.2}$$

где $f(x, \lambda)$—бесконечно дифференцируемая функция от x, λ. Пусть оператор (1.1) регулярен, т. е. существует постоянная $\varkappa>0$ такая, что для любых ξ, λ, $\xi\in R^n$, $\lambda\in M$

$$1+|P(\lambda, \xi)|\leqslant\varkappa\sum_{\nu\in H}|\xi^\nu|. \tag{1.3}$$

Нас интересует гладкость решений уравнения (1.2) $u(x, \lambda)$ из класса $W_2^H(R^n)$, зависящего от λ. Подобные задачи для эллиптических уравнений изучены в [1, 2]. Бесконечная дифференцируемость решений от x следует из гипоэллиптичности (см. [3]).

Обозначим через $N(\lambda)$ множество всех решений уравнения $P(\lambda, D)u=0$, из класса $W_2^{H}(R^n)$.

Лемма 1.1. Если $u \in W_2^{H}(R^n)$ является решением уравнения (1.2), где $f \in W_2^{kH}(R^n)$, $k \in Z_+^1$, то $u \in W_2^{(k+1)H}(R^n)$ и

$$\| u \|_{W_2^{(k+1)H}} \leqslant C(\| f \|_{W_2^{kH}} + \| u \|_{L_2}), \tag{1.4}$$

где C—постоянная, не зависящая от u, λ.

Доказательство. Так как $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $W_2^{H}(R^n)$, то по равенству Парсеваля с учетом регулярности (1.3) имеем

$$\| u \|^2_{W_2^{(k+1)H}} = \int_{R^n} \sum_{\alpha \in (k+1)H} |\xi^\alpha|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \sim$$

$$\sim \int_{R^n} (\sum_{\alpha \in H} |\xi^\alpha|^2)^{k+1} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \int_{R^n} (\sum_{\alpha \in H} |\xi^\alpha|^2)^k (\sum_{\alpha \in H} |\xi^\alpha|^2) | \tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\times \Big(\int_{R^n} (\sum_{\alpha \in H} |\xi^\alpha|^2)^k |P(\lambda, \xi)|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi +$$

$$+ \int_{R^n} (\sum_{\alpha \in H} | \xi^\alpha |^2)^k | \tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \Big) =$$

$$= \times (\| f \|^2_{W_2^{kH}} + \| u \|^2_{W_2^{kH}}).$$

Так как

$$\| u \|_{W_2^{kH}} \leqslant A (\varepsilon \| u \|_{W_2^{(k+1)H}} + C(\varepsilon) \| u \|_{L_2}),$$

то, взяв ε настолько маленьким, чтобы $A \cdot H \cdot \varepsilon < \frac{1}{2}$, и перенося в левую часть слагаемое $A \cdot H \cdot \varepsilon \|u\|_W$, получим доказательство леммы 1.1.

Лемма 1.2. Для любого фиксированного λ пространство $N(\lambda)$ имеет конечную размерность.

Доказательство. Применяя неравенство (1.4) при $k=1$, $f=0$, имеем

$$\sum_{\alpha \in H} \| D^\alpha u \|_{L_2(R^n)} \leqslant C \| u \|_{L_2(R^n)} \tag{1.5}$$

для любого $u \in N(\lambda)$.

Пусть последовательность $\{u_k\} \subset N(\lambda)$ и $\|u_k\|_{W_2^H} = 1$. Так как $W_2^H(R^n) \cdot W_2^{H(0)}(R^n)$ (см., напр., [4]), то $\{u_k\}$ сходится в $L_2(R^n)$. А из неравенства (1.5) следует, что $\{u_k\}$ сходится и $W_2^H(R^n)$. Отсюда следует, что в пространстве $N(\lambda)$ единичный оператор компактен и, следовательно, $N(\lambda)$ конечномерно.

Пусть размерность $N(\lambda)$ равна k для любого $\lambda \in M$ и не зависит от λ. И пусть $u_1(x, \lambda), \ldots, u_k(x, \lambda)$ ортонормированный в L_2 базис пространства $N(\lambda)$.

Теорема 1.1. Пусть размерность $N(\lambda)$ не зависит от λ. Тогда в множестве $N(\lambda)$ можно выбрать такой базис, чтобы они были бесконечно дифференцируемы по совокупности $x \in R^n$, $\lambda \in M$. Доказательство базируется на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 1.3. В условиях теоремы 1.1 для любой точки $\lambda_0 \in M$ можно найти окрестность $U(\lambda_0)$, в которой существует семейство функций **$v_1(x, \lambda), \ldots, v_k(x, \lambda)$, которые образуют базис в $N(\lambda)$ для любого** λ и непрерывны по совокупности переменных $x \in R^n$, $\lambda \in U(\lambda_0)$ вместе со всеми своими производными по x.

Доказательство. **Так как $\{v_i(x, \lambda_0)\}_{i=1}^k$ линейно независимы в R^n, то можно найти такие точки $x_1, \ldots, x_k \in R_n$,** что матрица $\|c_{ij}(\lambda)\|$ с коэффициентами $c_{ij} = v_i(x_j, \lambda)$, $i, j = 1, \ldots, k$ отлична от нуля в точке λ_0. Покажем, что существует такая окрестность $U(\lambda_0)$, что

$$\det\|c_{ij}(\lambda)\| \neq 0, \quad \forall \lambda \in U(\lambda_0). \tag{1.6}$$

Допустим противное. Это значит существует последовательность $\lambda_j \to \lambda_0$, что $\lambda_j \in M$ и $\det\|c_{ij}(\lambda)\| = 0$.

При каждом фиксированном $i_0 (i_0 = 1, \ldots, k)$ рассмотрим последовательность $\{v_{i0}(x, \lambda_s)\}_{s=1}^{\infty}$. Эти функции являются нормированными решениями уравнения $P(\lambda, D)u = 0$ и при любом $l \in Z_+^1$ в силу неравенства (1.4)

$$\| v_{i_0}(x, \lambda_s) \|_{lH} < C_l \| v_{i_0}(x, \lambda_s) \|_0 = C_l. \tag{1.7}$$

Следовательно, $v_i(x, \lambda_s)$ ограничено в любом $W_2^l(R^n)$ и в силу теоремы вложения принадлежит $C^m(R^n)$ для любого m. Из компактного вложения $W_2^l(R^n)$ в $L_2(R^n)$ следует, что существует $v_{i_0} \in L_2(R^n)$, что $v_{i_0}(x, \lambda_s) \to v_{i_0}(x)$ в $L_2(R^n)$ при $\lambda_s \to \lambda_0$. Так как $\| v_{i_0}(x, \lambda_s) \|_{L_2(R^n)} = 1$, то $\| v_{i_0}(x) \|_{L_2(R^n)} = 1$.

С другой стороны, так как для любого компакта $K \subset R^n$ $v_i(x, \lambda_s)$ ограничена в $W_2^l(K)$, то принадлежит $C^m(K)$ для любого m. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность $\{v_{i_0}(x, \lambda_s')\}$ равномерно сходящейся в K к функции $v_{i_0}(x)$ со своими производными любого порядка.

Повторяя это для любого $i_0 (i_0 = 1, \ldots, k)$, получим систему функций $v_1(x), \ldots, v_k(x)$. Очевидно, что $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ образуют базис в $N(\lambda)$. **В силу того, что $\det\|v_i(x_j \lambda_s)\| = 0$ для любого λ_s, $\det|v_i(x_j)| = \theta$.** Но так как $\{v_i(x)\}_1^k$ образуют ортонормированный базис в $N(\lambda_0)$, после разложения базиса $v_1(x, \lambda_0), \ldots, v_k(x, \lambda_0)$ по базису $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ получим, что

$$\det\|v_i(x_j, \lambda_0)\| = 0.$$

Полученное противоречие доказывает существование окрестности $U(\lambda_0)$, где выполняется неравенство (1.6).

Для каждого $\lambda \in U(\lambda_0)$ можно найти k линейно независимых функций вида

$$w_i(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} v_j(x, \lambda), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{1.8}$$

обладающих следующим свойством

$$w_i(x_j, \lambda)=0, \ i\neq j, \ w_i(x_i, \lambda)=1, \ i=1, ..., k. \tag{1.9}$$

Так как для любого $\lambda\in U(\lambda_0) \det\|c_{ij}(\lambda)\|\neq 0$, то коэффициенты $d_{ij}(\lambda)$ определяются однозначно.

В окрестности $U(\lambda_0)$ определим функции

$$u_i(x, \lambda)=w_i(x, \lambda) / \|w_i(x, \lambda)\|_0.$$

Условие (1.9) обеспечивает линейную независимость функций $\{u_i(x, \lambda)\}^k_{i=1}$, а из (1.8) следует, что они принадлежат $N(\lambda)$. Покажем, что u_i удовлетворяют условиям леммы 1.3. Пусть $\lambda_s\to\bar\lambda$, где $\bar\lambda$, $\lambda_s\in U(\lambda_0)$ произвольные. Покажем, что $u_i(x, \lambda_s)\to u_i(x, \bar\lambda)$ в $C^\infty_{loc}(R^n)$. Предложим, что это не верно, т. е. существует такая точка $\bar\lambda\in U(\lambda_0)$ и $\lambda_s\to\bar\lambda$, что $u_i(x, \lambda_s) \not\to u_i(x, \bar\lambda)$ в $C^\infty_{loc}(R^n)$. Так как для функций $\{u_i, (x, \lambda_s)\}$ выполняется неравенство (1.7), то некоторая ее подпоследовательность сходится в каждом пространстве $C^m_{loc}(R^n)$ (m произвольное). Пусть $u_i(x, \lambda'_s)\to\bar u_i(x)$. Очевидно, что в силу вложения $W_2^{l}(R^n)$ в $W_2^{l-1}(R^n)$ $\bar u_i\in N(\lambda)$, $\|\bar u_i\|_{L_2}=1$, $\bar u_i(x_j)=0$ при $i\neq j$ и $\bar u_i(x_i)>0$.

Из однозначности коэффициентов $d_{ij}(\lambda)$ следует, что в этих условиях $\bar u_i(x)$ определяется однозначным образом. Но, с другой стороны, этим условиям удовлетворяют и функции $u_i(x, \bar\lambda)$. Следовательно, $\bar u_i(x)$ совпадает с $u_i(x, \bar\lambda)$, что противоречит исходному предположению. Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. Пусть k—размерность $N(\lambda)$, точки $x_1, ..., x_k$, принадлежащие R^n, выбраны так, чтобы для некоторого базиса $N(\lambda)$ выполнялось условие (1.6). Тогда для любой функции $u\in W^{lH}$ (R^n), где $l\cdot\max\limits_{\alpha\in\partial' H}|\alpha|>n+\max\limits_{\alpha\in\partial' H}|\alpha|$, справедливо неравенство

$$\| u \|_{l,H}\leq C_{l,H}(\| P(\lambda, D)u \|_{(l-1)H} +\sum_{j=1}^{k}|u(x_j)|), \tag{1.10}$$

где постоянная C_{lH} не зависит от u, а зависит только от расположения точек x_j.

Доказательство. Сначала докажем это неравенство для функций u, равных нулю во всех точках x_j:

$$u(x_j)=0, \ j=1, ..., k. \tag{1.11}$$

Предположим, что не для всех таких функций оценка (1.10) выполняется. Тогда существует последовательность функций $\{\breve U_n\}\subset W_2^{lH}(R^n)$ удовлетворяющих условию (1.11), таких, что

$$\| \breve u_n \|_{lH}>n(\| P(\lambda,D)\breve u_n \|_{(l-1)H}).$$

Тогда последовательность $\breve u_n/\|\breve u_n\|_{lH}\equiv u_n$ слабо компактна в $W_2^{lH}(R^n)$ и удовлетворяет соотношению

$$\| P(\lambda, D)u_n \|_{(l-1)H}<\frac{1}{n}. \tag{1.12}$$

Пусть $u_*(x)$—слабый предел подпоследовательности $\{u_n\}$ в $W_2^{lH}(R^n)$.

Если l удовлетворяет условию теоремы, то в силу теоремы вложения $W_2^{lH}(R^n) \subset C(R^n)$ и, следовательно, $u_n(x) \to u_*(x)$ в $C_{loc}(R^n)$. Так как $u_n(x)$ удовлетворяет условиям (1.11), то $u_*(x)$ тоже удовлетворяет этим условиям. Переходя в неравенстве (1.12) к пределу при $n \to \infty$, получим, что $u_* \in N(\lambda)$. Из формул (1.6) и (1.11) следует, что все коэффициенты в разложении $u_*(x)$ по базису $N(\lambda)$ равны нулю, следовательно, $u_*(x) \equiv 0$. Но так как $\|u_n\|_{lH} = 1$, то получим противоречие.

Пусть теперь $u \in W_2^{lH}(R^n)$ произвольный.

Обозначим через $L_{k-1}(x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа, принимающий в точках x_j значения $L_{k-1}(x_j) = \dfrac{u(x_j)}{e^{-|x_j|^2}}$.

Рассмотрим функцию $\bar{u}(x) = u(x) - L_{k-1}(x)e^{-|x|^2}$. Функция $\bar{u}$ удовлетворяет условиям (1.11) и, следовательно, для нее доказана оценка (1.10). А для $u(x)$ получим

$$\|u\|_{lH} \leqslant \|\bar{u}\|_{lH} + \|L_{k-1}(x)e^{-|x|^2}\|_{lH} \leqslant$$

$$\leqslant C(\|P(\lambda, D)u\|_{(l-1)H} + \sum_{j=1}^{k} |u(x_j)|).$$

Лемма 1.4 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Мы покажем, что функции $u_i(x, \lambda)$ дифференцируемы по λ и их производные гладко зависят от λ. Рассмотрим функции $w_i(x, \lambda)$, определенные условиями (1.8), (1.9). Так как $w_i(x, \lambda) = u_i(x, \lambda)/u_i(x_i, \lambda)$, то функции $w_i(x, \lambda)$ тоже непрерывны по λ, то достаточно теорему доказать для функций $\{w_i(x, \lambda)\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть e—какой-нибудь орт. Фиксируем i, h и рассмотрим функцию

$$Z_h(x) = \frac{1}{h}(w_i(x, \lambda + eh) - w_i(x, \lambda)).$$

Так как $P(\lambda + he, D)w_i(x, \lambda + he) = 0$, $P(\lambda, D)w_i(x, \lambda) = 0$, то получим

$$P(\lambda, D)Z_h(x) = \frac{1}{h}P(\lambda, D)w_i(x, \lambda + he) -$$

$$-\frac{1}{h}P(\lambda, D)w_i(x, \lambda) = -\frac{1}{h}P(\lambda + he, D)w_i(x, \lambda + he) +$$

$$+\frac{1}{h}P(\lambda, D)w_i(x, \lambda + he) -$$

$$-\frac{1}{h}P(\lambda, D)w_i(x, \lambda) \equiv F(x, \lambda).$$

Получим что функция $Z_h(x)$ является решением уравнения

$$P(\lambda, D)Z_h(x) = F(x, \lambda),$$

где

$$F(x, h) = -\frac{1}{h}(P(\lambda + he, D) - P(\lambda, D))w_i(x, \lambda + he).$$

Так как коэффициенты оператора $P(\lambda, D)$ гладко зависят от λ, то, применяя теорему Лагранжа, получим

$$F(x, \lambda) = -\frac{1}{h}\sum_{\alpha\in H}(a_\alpha(\lambda+he)-a_\alpha(\lambda))D^\alpha w_i(x, \lambda+he) =$$

$$= -\sum_{\alpha\in H}\nabla_\lambda a_\alpha(\xi_\alpha)eD^\alpha w_i(x, \lambda+he),$$

где точки $\xi_\alpha \in M$. Так как $a_\alpha \in C^\infty(\overline{M})$, то существует постоянная A, что

$$|\nabla_\lambda a_\alpha(\xi_\alpha)| \leq A, \quad \forall \alpha\in H, \ \xi_\alpha\in\overline{M}.$$

Оценим норму $F(x, \lambda)$ в $W_2^{lH}(R^n)$. Имеем

$$\| F(x, \lambda) \|_{W_2^{lH}(R^n)} \leq A\sum_{\alpha\in H}\| D^\alpha w_i \|_{W_2^{lH}(R^n)} \leq$$

$$\leq A \| w_i \|_{W_2^{(l+1)H}(R^n)}.$$

Так как $w_i \in N(\lambda)$, то, применяя неравенство (1.5), получим

$$\| F(x, \lambda) \|_{W_2^{lH}(R^n)} \leq CA \| w_i \|_{L_2(R^n)} =$$

$$= CA\frac{\| u_i(x, \lambda+he) \|_{L_2(R^n)}}{| u_i(x_i, \lambda+he) |} = \frac{C}{| u_i(x_i, \lambda+he) |}.$$

С другой стороны, $u_i(x_i, \lambda)$ непрерывны по λ и $|u_i(x_i, \lambda)| > 0$. Следовательно, существуют числа λ_0, $a>0$ такие, что для любого $h<h_0$ $|u_i(x_i, \lambda+he)| > a$. Следовательно, имеем

$$\| F(x, \lambda) \|_{W_2^{lH}(R^n)} \leq \frac{CA}{a}, \quad \forall h<h_0.$$

Таким образом $\|F(x, \lambda)\|_{W_2^{lH}(R^n)}$ равномерно ограничено по λ.

Согласно соотношениям (1.9) $Z_h(x_i)=0$, $i=1, \ldots, k$. Так как решение уравнения $P(\lambda, D)Z_h = F(x, \lambda)$, то, применяя лемму 1.4, получим, что для любого l

$$\| Z_h \|_{W_2^{lH}(R^n)} \leq C_{l,H} \| F(x, \lambda) \|_{W_2^{(l-1)H}(R^n)}.$$

Так как $\|F(x, \lambda)\|_{W^{(l-1)H}}$ равномерно ограничено по λ, то Z_h тоже равномерно ограничено в любом $W_2^{lH}(R^n)$ и поэтому существует функция $Z_0(x)$, что $Z_h(x) \to Z_0(x)$ в $C^\infty_{loc}(R^n)$. Очевидно $Z_0(x) = D_\lambda^i w_i$, которое бесконечно дифференцируемо по x. Заметим, что $D_\lambda^i w_i(x_j) = 0$, $j=1, \ldots, k$, поэтому аналогичное рассуждение можно делать для функции

$$Z_h^{(1)}(x) = \frac{1}{h}(D_\lambda^i w_i(x, \lambda+he) - D_\lambda^i w_i(x, \lambda))$$

и т. д. Теорема 1.1 доказана.

Лемма 1.5. Если функция $u \in W_2^{lH}(R^n)$ для достаточно больших l и ортогональна в $L_2(R^n)$ ядру $N(\lambda)$, то существует постоянное $C_l > 0$ такое, что для любых таких функций $u \in W_2^{lH}(R^n)$

$$\| u \|_{lH} \leqslant C_l (\| P(\lambda, D)u \|_{(l-1)H}). \tag{1.13}$$

Доказательство. Как и при доказательстве неравенства (1.10), допустим это не верно. Тогда найдется последовательность $u_n(x)$, ортогональная $N(\lambda)$, и $\|u_n\|_{lH}=1$, для которой выполняется неравенство

$$\| P(\lambda, D)u_n \|_{(l-1)H} < \frac{1}{n}.$$

Так как $u_n - u_*$ в $W^{(lH)^\bullet}(R^n)$ и l достаточно большое число, то $W^{(lH)^\circ} < C(R^n)$ и $u_n - u_*$ в $C(R^n)$. Очевидно, что u_* тоже ортогонально $N(\lambda)$. С другой стороны, $\|u_*\|_{lH}=1$, и по неравенству (1.13) $u_* \in N(\lambda)$. Полученное противоречие доказывает лемму 1.5.

Пусть $f \in W_2{}^l(R^n)$ для любого l и бесконечно дифференцируема по (x, λ), которые принадлежат $W_2{}^l(R^n)$.

Теорема 1.2. **Пусть размерность $N(\lambda)$ не зависит от λ. Тогда любое решение уравнения**

$$P(\lambda, D)u=f, \tag{1.14}$$

ортогональное $N(\lambda)$ в $L_2(R^n)$ при каждом $\lambda \in M$, бесконечно дифференцируемо по (x, λ).

Доказательство. Пусть $u(x, \lambda)$—ортогональное $N(\lambda)$ решение уравнения (1.14). Фиксируем точку (x, λ), e—единичный вектор в R^n. Тогда имеем $u(x, \lambda+he) = u_1(x, \lambda+he) - u_2(x, \lambda+he)$, где $u_1 \in N^\perp$, $u_2 \in N$. По теореме 1.1 в $N(\lambda)$ существует гладкий, ортонормированный базис $v_1(x, \lambda), \ldots, v_k(x, \lambda)$, который образует базис и в некоторой окрестности $U(\lambda)$. Следовательно,

$$u_2(x, \lambda+he) = \sum_{j=1}^{k} c_j(\lambda, h) v_j(x, \lambda),$$

где

$$c_j(\lambda, h) = (u(x, \lambda+he), v_j(x, \lambda)).$$

Так как $u(x, \lambda+he)$ ортогонально $\{v_j(x, \lambda+he)\}_1^k$, то имеем

$$c_j(\lambda, h) = (u(x, \lambda+he), v_j(x, \lambda)) - (u(x, \lambda+he), v_j(x+he)) =$$

$$= (u(x, \lambda+he), (v_j(x, \lambda) - v_j(x, \lambda+he)) =$$

$$= -(u(x, \lambda+he), e\nabla_\lambda v_j(x, \lambda+\theta e) \cdot h),$$

$$0<\theta<h.$$

Учитывая неравенство (1.5), получим

$$\| u_2(\lambda+he) \|_{W_2^{lH}} \leqslant \sum_{j=1}^{k} | c_j | \; \| v_j(\lambda) \|_{W_2^{lH}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{j=1}^{k} | c_j | \; \| v_j(\lambda) \|_0 = C \sum_{j=1}^{k} | c_j | \leqslant$$

$$\leqslant Ch \, \| u(\lambda+he) \|_0 \sum_{j=1}^{k} \sup_{0<\theta<h} \| \nabla_\lambda v_j(\lambda+\theta e) \|_0. \tag{1.15}$$

Теперь оценим функцию $u_1(x, \lambda+he)-u(x, \lambda)$.
Так как она ортогональна $N(\lambda)$, то можно применить лемму 1.5. Для этого сначала рассмотрим

$$P(\lambda, D)(u_1(x, \lambda+he)-u(x, \lambda))=$$
$$=P(\lambda, D)(u(x, \lambda+he)-u(x, \lambda))=$$
$$=P(\lambda+he, D)u(x, \lambda+he)-P(\lambda, D)u(x, \lambda)-$$
$$-(P(\lambda+he, D)-P(\lambda, D))u(x, \lambda+he)=$$
$$=f(x, \lambda+he)-f(x, \lambda)-$$
$$-(P(\lambda+he, D)-P(\lambda, D))u(x, \lambda+he)=$$
$$=he\nabla_\lambda f(x, \lambda+\theta_1 e)-$$
$$-\sum_{\alpha\in H} h\nabla_\lambda a_\alpha(\lambda+h_\alpha e)\cdot eD^\alpha u(x, \lambda+he).$$

Применяя на функции $u_1(x, \lambda+he)-u(x, \lambda)$ неравенство (1.12), получим

$$\| u_1(x, \lambda+he)-u(x, \lambda)\|_{W_2^{lH}}\leqslant$$
$$\leqslant C_l \| P(\lambda, D)(u_1(x, \lambda+he)-u(x, \lambda)\|_{W_2^{(l-1)H}}\leqslant$$
$$\leqslant h\cdot C_l(\sup_{0<\theta_1<h} \|\nabla_\lambda f(\lambda+\theta_1 e)\|_{W_2^{(l-1)H}}+$$
$$+\max_{\alpha\in H}\sup_{\substack{0<h_\alpha<h\\ h\in M}} |\nabla_\lambda a_\alpha(\lambda+h_\alpha e)|\,\|u(x, \lambda+he)\|_{W_2^{lH}}).$$

Пусть $A=\max\limits_{\alpha\in H}\sup\limits_{\substack{0<h_\alpha<h\\ h\in M}} |\nabla_\lambda a_\alpha(\lambda+h_\alpha e)|$,

$$B=\sup_{0<\theta_1<h}\|\nabla_\lambda f(\lambda+\theta_1 e)\|_{W_2^{(l-1)H}}.$$

Тогда имеем

$$\| u_1(x, \lambda+he)-u(x, \lambda)\|_{W_2^{lH}}\leqslant$$
$$\leqslant hC_l(B+A\,\| u(\lambda+he)\|_{W_2^{lH}}). \tag{1.16}$$

Сравнивая (1.15) и (1.16), получим

$$\left\|\frac{u(x, \lambda+he)-u(x, \lambda)}{h}\right\|_{W_2^{lH}}\leqslant$$
$$\leqslant\left\|\frac{u_2(x, \lambda+he)}{h}\right\|_{W_2^{lH}}+\left\|\frac{u_1(x, \lambda+he)-u(x, \lambda)}{h}\right\|_{W_2^{lH}}\leqslant$$
$$\leqslant C\,\| u(\lambda+he)\|_0\sum_{j=1}^{k}\sup_{0<\theta<h}\|\nabla_\lambda v_j(\lambda+\theta e)\|_0+$$
$$+C_l(B+A\,\| u(\lambda+he)\|_{W_2^{lH}}).$$

Таким образом $\|(u(x, \lambda+he)-u(x, \lambda))/\lambda\|_0$ равномерно ограничено по λ и, следовательно, существует $D_\lambda^1 u(x, \lambda)$. Аналогично показывается существование остальных производных.

Кафедра численного анализа *Поступила 3.05.1988*

ЛИТЕРАТУРА

1. Schechter. Differentiability of solutions of elliptic problems with respect to parameters.— Boll Un. Mat. I tal., 1976, v. 5 13—A, № 3, p. 601—608.
2. **Кондратьев В. А., Уроев В. М.** О гладкости решений первой краевой задачи для эллиптических уравнений с параметром.—Диф. ур., 1985, т. XXI, № 8, с. 1407—1412.
3. **Никольский С. М.** Первая краевая задача для одного линейного уравнения.—ДАН СССР, 1962, т. 146, № 4, с. 767—769.
4. **Казарян Г. Г., Карапетян Г. А.** О сходимости галеркинских приближений к решению задачи Дирихле для некоторых общих уравнений.—Мат. сб., 1984, т. 124 (166), № 3 (7), с. 291—306.

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է հիպոէլիպտիկ հավասարումների մի դասի լուծումների ողորկությունն ըստ λ պարամետրի։ Մասնավորապես ապացուցվում է հետևյալը։ Դիցուք ունենք $P(\lambda,D)u=f$ հավասարումը։ Նշանակենք $N(\lambda)$-ով $P(\lambda,D)u=0$ հավասարման լուծումների բազմությունը $W_2^H(R^n)$ դասից։ Եթե $N(\lambda)$-ի չափը կախված չէ λ-ից, ապա $P(\lambda,D)u=f$ հավասարման բոլոր լուծումները, որոնք օրթոգոնալ են $N(\lambda)$-ին $L_2(R^n)$-ում, անվերջ դիֆերենցելի են ըստ (x,λ)-ի։

Summary

In the article the solution of smoothness of one of the classes of hypoelliptic equations according to λ parameter has been proved. The following has been proved particularly. For example if we have the equation $P(\lambda, D)u=f$. Let's mark by $N(\lambda)$ the set of solutions of equation $P(\lambda, D)u=O$ from class $W_2^H(R^n)$. If the dimension of $N(\lambda)$ does not depend on λ, then all the solutions of equation $P(\lambda, D)u=f$ that are orthogonal to $N(\lambda)$ are infinitely differentiable by (x, λ).