ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1986 Естественные науки

Математика

УДК 517.51

Г. Г. ГЕВОРКЯН

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО КЛАССОВ l_p, $p<2$, ДЛЯ СИСТЕМ ЧИСЕЛЬСКОГО

Пусть $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$ —система Чисельского.

В работе доказывается существование такого множества $E\subset[0,1]$, $\mu E=1$, что если $\sum\limits_{n=-m}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и $\sum\limits_{n=-m}^{\infty}a_n f_n^{(m)}(x)=0$, когда $x\in E$, то все a_n равны нулю.

Определение 1. Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$—полная ортонормированная система функций на отрезке $[a; b]$. Скажем, что $E\subset[a; b]$ является U_p-множеством для системы $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, если из того, что $f(t)=0$ п. в. вне E и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\int\limits_a^b f(t)\varphi_n(t)dt\right|^p<+\infty$, следует, что $f(t)=0$ п. в. на $[a, b]$.

Определение 2. Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$— ортонормированная система функций на отрезке $[a; b]$. Скажем, что $E\subset[a; b]$ является U_p^* -множеством для системы $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, если из того, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(t)=0$ всюду вне E, следует, что $a_n=0$, $n=0, 1, 2\ldots$

В работе [1] доказано, что для любого $\varepsilon>0$ существует множество $E\subset[0; 2\pi]$, $\mu E>2\pi-\varepsilon$, которое является U_p-множеством для тригонометрической системы при любом $p<2$.

В дальнейшем Гользани [2] распространил эту теорему на любые полные равномерно ограниченные системы и поставил вопрос: верна ли эта теорема для любой полной ортонормированной системы?

В работах [3—5] доказана

Теорема 1. Для любой полной $L_2[0; 1]$ ортонормированной системы $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ и любого $\varepsilon>0$ существует множество $E\subset[0; 1]$, $\mu E>1-\varepsilon$, которое является U_p-множеством для системы $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ при любом $p<2$.

Легко видеть, что всякое U_p-множество при $p<2$ является U_p^*-множеством. Поэтому из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ —полная в $L_2[0; 1]$ ортонормированная система функций. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует замкнутое множество $E\subset[0; 1]$, $\mu E>1-\varepsilon$, которое является U_p^* -множеством для системы $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ при любом $p<2$.

В работах [6, 7] доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. Существует множество $E\subset[0; 2\pi]$, $\mu E=2\pi$, которое является U_p^*-множеством для тригонометрической системы при любом $p<2$.

Теорема 4. Пусть $\{\chi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ —система Хаара на $[0, 1]$. Тогда существует множество $A\subset[0; 1]$, $\mu A=1$, такое, что если $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и для некоторой подпоследовательности n_k,

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{n_k} a_n\chi_n(t)=0 \text{ для всех } t\in A,$$

то $a_k=0$ для всех k.

Теорема 5. Пусть $\{W_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ —система Уолша-Пели, тогда существует множество $A\subset[0; 1]$, $\mu A=1$, такое, что если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nW_n(t)=0$ для всех $x\in A$, то все a_k равны нулю.

В работе [8] доказаны более общие теоремы, чем сформулированные выше.

В настоящей статье доказывается аналог теорем 3—5 для систем Чисельского (об этих системах см. [9]).

Напомним некоторые свойства ортонормальных систем Чисельского $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$ порядка m, $m\geq-1$.

Для каждого m система $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$ является базисом пространства $C^m[0; 1]$.

Функции системы $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$ удовлетворяют следующим оценкам (см. [9], теорему 6.1):

$$|f_n^{(m)}(t)|\leq C_m\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot q_m^{n|t-t_n|},\quad n\geq2, \tag{1}$$

C_m и q_m —константы, зависящие только от m, $0<q_m<1$, где $t_n=\dfrac{\nu-\frac{1}{2}}{2^\mu}$,

а μ и ν определяются из соотношений $n=2^\mu+\nu$, $\mu\geq0$, $1\leq\nu\leq2^\mu$.

Обозначим через $K_n^{(m)}(t, s)$ ядро Дирихле системы $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$, т. е. $K_n^{(m)}(t, s)=\sum\limits_{i=-m}^{n} f_i^{(m)}(t)f_i^{(m)}(s)$. Тогда (см. [9], теорему 2.1)

$$|K_n^{(m)}(t, s)|\leq M_m\; n\; \gamma_m^{n|t-s|}, \tag{2}$$

где M_m и γ_m—константы, зависящие только от m и $0<\gamma_m<1$.

В случае $m=-1$ система Чисельского совпадает с системой Хаара, а в случае $m=0$—с системой Франклина (см. [9]).

Для систем Чисельского верна следующая

Теорема 6. Существует множество $E^{(m)}\subset[0; 1]$, $\mu E^{(m)}=1$, такое, что если $\sum\limits_{n=-m}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и для некоторой подпоследовательности n_k

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=-m}^{n_k} a_nf_n^{(m)}(t)=0,\quad x\in E^{(m)}, \tag{3}$$

то $a_n=0$ для всех n.

Для доказательства теоремы 6 нам нужна следующая (см. [7])

Теорема 7. Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ —полная ортонормированная система функций и каждая функция $\varphi_n(t)$ имеет лишь конечное число точек разрыва. Тогда существует множество E, $\mu E=1$, такое, что если $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и для некоторой подпоследовательности m_i, $i=1, 2, \dots$, выполняются условия

$$\sigma_i(x)=\frac{\sum_{j=1}^{i}\sum_{n=0}^{m_j}a_n\varphi_n(x)}{i}\to 0,\quad |\sigma_i(x)|\leqslant M<+\infty \qquad \text{для всех } x\in E,$$

то все коэффициенты a_k, $k=0, 1, 2, \dots$, равны нулю.

Лемма 1. Пусть $f(t)$—интегрируемая функция и $\lambda(x)$ функция, удовлетворяющая условию Липшица порядка 1. Тогда $S_n^{(m)}(\lambda f)(x)-\lambda(x)S_n^{(m)}(f)(x)$ равномерно сходится к нулю, где $S_n^{(m)}(\varphi)(x)$—частичные суммы ряда Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{f_k^{(m)}(x)\}_{k=-m}^{\infty}$.

Доказательство. По условию для некоторого $K>0$

$$|\lambda(x)-\lambda(y)|\leqslant K|x-y| \text{ для всех } x, y\in[0; 1]. \tag{4}$$

Тогда (см. (4) и (2))

$$|S_n^{(m)}(\lambda f)(x)-\lambda(x)S_n^{(m)}(f)(x)|=\left|\int_0^1 f(y)\lambda(y)K_n^{(m)}(x, y)dy-\right.$$

$$\left.-\lambda(x)\int_0^1 f(y)K_n^{(m)}(x,y)dy\right|\leqslant\int_0^1|f(y)||\lambda(y)-\lambda(x)||K_n^{(m)}(x, y)|dy\leqslant \tag{5}$$

$$\leqslant K\cdot M_m\int_0^1|f(y)|\cdot n\cdot|x-y|\cdot\gamma_m^{|x-y|}dy.$$

Обозначив

$$\alpha_n=\sup_{\beta}\int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{n}}|f(y)|dy.$$

из (5) получим

$$|S_n^{(m)}(\lambda f)(x)-\lambda(x)S_n^{(m)}(f)(x)|\leqslant 2KM_m\alpha_n\sum_{k=1}^{\infty}K\gamma_m^k\leqslant A_m\alpha_n, \tag{6}$$

где A_m—некоторая константа, зависящая только от m. Из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что α_n стремится к нулю, когда $n\to+\infty$. Поэтому из (5) следует утверждение леммы.

Доказанная лемма является аналогом одной теоремы Штейнгауза (см. [10], стр. 111).

Лемма 2. Если

$$\sum_{n=-m}^{\infty}\left|\int_0^1 f(t)f_n^{(m)}(t)dt\right|^p<+\infty \text{ для некоторого } 1\leqslant p<2 \tag{7}$$

и $\lambda(x)\in\mathrm{Lip}\,1$, то

$$\sum_{n=-m}^{\infty}\left|\int_0^1 f(t)\lambda(t)f_n^{(m)}(t)dt\right|^p<+\infty. \tag{8}$$

Доказательство. Из (7) следует, что

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\int_0^1 f(t)\lambda(t_n)f_n^{(m)}(t)dt\right|^p<+\infty.$$

Поэтому для доказательства (8) достаточно установить, что

$$I=\sum_{n=2}^{\infty}\left|\int_0^1 f(t)\lambda(t_n)f_n^{(m)}(t)dt-\int_0^1 f(t)\lambda(t)f_n^{(m)}(t)\,dt\right|<+\infty. \tag{9}$$

Из (1) и (4) имеем

$$I=\sum_{n=2}^{\infty}\left|\int_0^1 f(t)\lambda(t_n)f_n^{(m)}(t)\,dt-\int_0^1 f(t)\lambda(t)f_n^{(m)}(t)\,dt\right|\leq$$

$$\leq\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^1|f(t)\,|\,\lambda(t_n)-\lambda(t)\,|\,|f_n^{(m)}(t)|dt\leq$$

$$\leq C_m\cdot K\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\int_0^1|f(t)||t-t_n|n^{-\frac{1}{2}}q_m^{n|t-t_n|}dt\leq \tag{10}$$

$$\leq C_mK\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\int_0^1|f(t)|2^k|t-t_n|\cdot q_m^{2^k|t-t_n|}\,dt.$$

Обозначив $\Delta_m^{(k)}=[(m-1)2^{-k},\ m\cdot2^{-k}]$, из (10) получим

$$I\leq C_mK\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\sum_{m=1}^{2^k}\int_{\Delta_m^{(k)}}|f(t)|2^k|t-t_n|q_m^{2^k|t-t_n|}\,dt=$$

$$=C_mK\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{2^k}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\int_{\Delta_m^{(k)}}|f(t)|2^k|t-t_n|q_m^{2^k|t-t_n|}dt\leq$$

$$\leq 2C_mK\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{2^k}\sum_{j=1}^{2^k}j\cdot q_m^j\int_{\Delta_m^{(k)}}|f(t)|dt\leq$$

$$\leq C_m'\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{2^k}\int_{\Delta_m^{(k)}}|f(t)|dt=C_m'\int_0^1|f(t)|\,dt\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}}<+\infty,$$

где C_m' — константа, зависящая от K, C_m и q_m. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. В случае $m=-1$ теорема 6 совпадает с теоремой 4. Поэтому нам достаточно доказать теорему 6 в случаях $m\geqslant 0$. В таких случаях функции $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$ непрерывны.

Пусть $F_k^{(m)}$—замкнутые множества, являющиеся U_p^*-множеством для системы $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$ при любом $p<2$ и $\mu F_k^{(m)}>1-\frac{1}{k}$, а E_m—множество, удовлетворяющее теореме 7 в случае, когда $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ есть система Чисельского $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$. Докажем, что множество $E^{(m)}=E_m\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^{(m)}\right)$ удовлетворяет требованиям теоремы 6.

Пусть $\sum_{n=m}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и для некоторой последовательности n_k

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=-m}^{n_k}a_nf_n^{(m)}(t)=0 \text{ для всех } x\in E^{(m)}.$$

Обозначим

$$G=\left\{x:\limsup_{k\to+\infty}\left|\sum_{n=-m}^{n_k}a_nf_n^{(m)}(t)\right|\geqslant 1\right\}.$$

Если $G=\varnothing$, то ряд $\sum_{n=-m}^{\infty}a_nf_n^{(m)}(t)$ является рядом Фурье от некоторой ограниченной функции. Поэтому частичные суммы $\sum_{n=-m}^{n_k}a_nf_n^{(m)}(t)$ ограничены, и по теореме 7 все коэффициенты a_n равны нулю.

Если $G\neq\varnothing$, то из того, что G типа G_δ и $G\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^{(m)}$, где $F_k^{(m)}$—замкнутые множества, следует существование интервала I и натурального числа k_0 таких, что (см. [11], стр. 548)

$$\Phi\neq G\cap I\subset I\cap F_{k_0}^{(m)}. \tag{11}$$

Возьмем какой-нибудь интервал $J\subset I$, который не пересекается с $F_k^{(m)}$ ($F_{k_0}^{(m)}$ замкнуто). Пусть $\lambda(x)$—непрерывно дифференцируемая функция, которая положительна на J и равна нулю вне J. Ряд $\sum_{n=-m}^{\infty}a_nf_n^{(m)}(t)$ является рядом Фурье от некоторой функции $\left(\sum_{n=-m}^{\infty}|a_n|^p<+\infty\right)f(x)$. Из леммы 1 следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(S_{n_k}^{(m)}(\lambda f)(t)-\lambda(t)\sum_{n=-m}^{n_k}a_nf_n^{(m)}(t)\right)=0 \text{ равномерно по } t.$$

Следовательно, частичные суммы $S_{n_k}^{(m)}(\lambda f)(t)$ равномерно ограничены и

$$\lim_{k\to\infty}S_{n_k}^{(m)}(\lambda f)(t)=0, \quad \text{когда } t\in E_m.$$

Из леммы 2 следует, что коэффициенты Фурье функции $f(t)\lambda(t)$ по системе $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$ суммируются со степенью p.

В силу теоремы $7\lambda(t)f(t)=0$ п. в. Поэтому $f(t)=0$ п. в. на J.

Из того, что J—произвольный интервал, лежащий в $I\setminus F_{k_0}^{(m)}$, следует

$$f(t)=0 \quad \text{п. в. на} \quad I\setminus F_{k_0}^{(m)}. \tag{12}$$

Пусть $v(t)$—непрерывно дифференцируемая функция, которая положительна на I и равна нулю вне I. Из леммы 2 следует, что коэффициенты Фурье функции $f(t)v(t)$ по системе $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$ суммируются со степенью p. Учитывая, что $f(t)v(t)=0$ п. в. вне $F_{k_0}^{(m)}$ из теоремы I получим $f(t)v(t)=0$ п. в. на $[0, 1]$. Поэтому $f(t)=0$ п. в. на I. Из принципа локализации для систем $\{f_n^{(m)}(t)\}_{n=-m}^{\infty}$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=-m}^{n_k} a_n f_n^{(m)}(t)=0 \text{ для } t\in I.$$

Но это противоречит (11). Теорема доказана.

Кафедра теории оптимального управления и приближенных методов

Поступила 17.10.1985

ЛИТЕРАТУРА

1. **Katznelson Y.** Sets of uniqueness for Some class of trigonometric series. — Bull. Amer. Math. Soc., 1964, v. 70, p. 723.
2. **Golzani L.** Sets of uniqueness of lp for General Orthonormal Complete Systems. — Boll U. M. I., 1979, (5), 16 — B, p. 1134 — 1143.
3. **Golzani L.** Existense of Sets of uniqueness of lp for General Orthonormal Systems. — Proc. A. M. S., 1981, v. 83, №3, p. 551 — 556.
4. **Геворкян Г. Г.** О множествах единственности для полных ортонормированных систем.—Мат. заметки, 1982, т. 32, № 5, с. 551—556.
5. **Геворкян Г. Г.** О множествах единственности для полных ортонормированных систем и интегралов Фурье.—ДАН Арм. ССР, 1981, т. LXXII, № 4, с. 218—223.
6. **Michele L., Soardi P. M.,** A Remark on Sets of uniqueness of lp. — Boll. U. M. I., 1975, (4), N11, p. 64 — 65.
7. **Геворкян Г. Г.** О множествах единственности для рядов по некоторым полным ортонормированным системам.—Уч. записки ЕГУ, 1981, № 2, с. 10—22.
8. **Геворкян Г. Г.** О множествах единственности для некоторых ортогональных рядов.—Изв. АН Арм. ССР, сер. мат., 1983, т. XVIII, № 6, с. 448—475.
9. **Ciesielski Z.** Constructive function theory and spline systems. — Studia Math., 1975, v. LIII, p. 277 — 301.
10. **Барп Н. К.** Тригонометрические ряды. М.: 1961.
11. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. М.: 1965.

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՑԻՍԵԼՍԿԻԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ l_p, $p<2$, ԴԱՍԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Դիցուք $\{f_n^{(m)}(x)\}_{n=-m}^{\infty}$-ը Ցիսելսկիի m-րդ կարգի համակարգն է։ Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $E\subset[0,1]$ բազմություն, $\mu E=1$, որ եթե որևէ p-ի համար, $p<2$, $\sum_{n=-m}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ և $\sum_{n=-m}^{\infty} a_n f_n^{(m)}(x)=0$, երբ $x\in E$, ապա բոլոր a_n-երը հավասար են զրոյի։