ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1984 Естественные науки

Математика

УДК 519.2

К. В ГАСПАРЯН

О ФОРМУЛЕ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ОПЦИОНАЛЬНЫХ СЕМИМАРТИНГАЛОВ

Для опциональных семимартингалов, которые задаются стохастическими интегралами по мартингалам и случайным мерам, найдена формула замены переменных, в которой скачкообразная часть представляется через интегралы по исходным целочисленным мерам. В работе не предполагается, что выполняются «обычные» условия: неубывающее семейство σ-алгебр $F=(F_t)$ пополнено и непрерывно справа.

Данная статья обобщает результат Л. И. Гальчука, доказанный при «обычных» предположениях о семействе σ-алгебр F.

Для большого класса семимартингалов, задающихся стохастическими интегралами по целочисленным случайным мерам, Л. И. Гальчуком в [1] получена формула замены переменных (ф. з. п), в которой в отличие от соответствующей формулы, доказанной К. Долеан-Дейд и П. А. Мейером в [2] для произвольных семимартингалов, скачкообразная часть представляется через интегралы по исходным целочисленным мерам. В [1] и [2] предполагается, что выполняются «обычные» условия, т. е. заданное на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P) неубывающее семейство σ-алгебр $F=(F_t)$ пополнено и непрерывно справа, т. е. $F_t=\bigcap_{t<s} F_s$ для любого $t\in\mathbf{R}_+$, где $\mathbf{R}_+=[0, +\infty[$ и F_0 содержит все P-нулевые множества. В данной работе мы снимем эти принудительные ограничения на систему σ-алгебр и получим аналогичный приведенному в [1] результат для некоторого класса опциональных семимартингалов. При этом мы будем исходить из следующей ф. з. п., полученной в [3]:

$$F(X_t)=F(X_0)+\int\limits_{]0,t]}\sum_k D^kF(X_{s-})d(A^{kr}+m^{kr})_s+\frac{1}{2}\int\limits_{]0,t]}\sum_{k,j}D^kD^jF(X_{s-})d<m^{kc},$$

$$m^{jc}>_s+\sum_{0<s<t}[F(X_s)-F(X_{s-})-\sum_k D^kF(X_{s-})\Delta X_s^k]+\int\limits_{[0,t[}\sum_k D^kF(X_s)d(A^{kg}+$$

$$+m^{kg})_{s+}+\sum_{0\leq s<t}[F(X_{s+})-F(X_s)-\sum_k D^kF(X_s)\Delta^+X_s^k], \qquad (1)$$

где X—n-мерный опциональный семимартингал, т. е. $X=(X^1, \ldots, X^n)$, $X^k=X_0^k+A^k+m^k$, $k=1, \ldots, n$; X_0^k — F_0— измеримая случайная величина (с. в.); A^k—процесс с конечной вариацией; m^k—опциональный локальный мартингал; $F(x)=F(x^1, \ldots, x^n)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на R^n функция; D^k—оператор дифференцирования по k-ой координате; $\Delta X_s=X_s-X_{s-}$, $\Delta^+X_s=X_{s+}-X_s$; m^r—регулярная составляющая процесса m в разложении $m=m^g+m^r$ (см. [3]), $m^r=m^c+m^d$; m^c — непрерывная, $m^d(m^g)$ — непрерывная справа (соответственно слева), имеющая пределы слева (соответственно справа) составляющие (аналогично для A); $\langle m^{kc}, m^{jc}\rangle$ — предсказуемый процесс локально интегрируемой вариации такой, что $m^{kc}\cdot m^{jc}-\langle m^{kc}, m^{jc}\rangle$ — локальный мартингал, а ряды $\sum\limits_{0<s<t}[\cdot]$ и $\sum\limits_{0<s<t}[\cdot]$ в (1) абсолютно сходятся почти наверно (п. н.).

Статья состоит из трех частей: в первой—приведены необходимые обозначения и понятия, во второй—дано представление опциональных семимартингалов, в третьей—получена искомая ф. з. п.

1. Необходимые обозначения и понятия

Пусть заданы полное вероятностное пространство (Ω, F, P) и неубывающее на нем семейство σ-алгебр $F=(F_t)$, $t\in R_+$, не удовлетворяющее «обычным» условиям.

Введем ряд обозначений:

P (соответственно O) — предсказуемая (соответственно опциональная σ-алгебра, отвечающая семейству F, т. е. σ-алгебра, порожденная всеми F согласованными процессами, траектории которых непрерывны слева (соответственно справа) и имеют пределы справа (слева). Аналогично определяются P_+ (соответственно O_+) — σ-алгебры, отвечающие семейству $F_+=(F_{t+})$, $F_{t+}=\bigcap\limits_{t<s}F_s$. O- или P-измеримые процессы условимся называть опциональными или предсказуемыми соответственно.

$T(T_+)$ — совокупность моментов остановок (м. о.) относительно F (F_+), т. е. таких с. в. T со значениями в $R_+\cup\{+\infty\}$, что множество $(T\leqslant t)\in F_t((T\leqslant t)\in F_{t+})$. $T^p(T^p_+)$ — совокупность предсказуемых м. о относительно $F(F_+)$, т. е. таких S, $S\in T(S\in T_+)$, для каждого из которых существует последовательность (S_n), $S_n\in T_+$, $n\in N$, что $S_n\uparrow S$ п. н. при $n\to\infty$ и $S_n<S$ п. н. на $(S>0)$. $T^i(T^i_+)$ — совокупность тотально недостижимых м. о. относительно $F(F_+)$, т. е. таких T, $T\in T$ $(T\in T_+)$, для каждого из которых $P(S=T<\infty)=0$ для любого $S\in T^p$.

$\tilde{O}=O\times E(\tilde{O}_+=O_+\times E)$, $\tilde{P}=P\times E$ $(\tilde{P}_+=P_+\times E)$ — σ-алгебры на пространстве $\Omega\times R_+\times E$, где $E=(R^n\setminus\{0\})\cup\{\delta\}$, E — борелевская σ-алгебра на E, δ — некоторая дополнительная точка.

V — множество F-согласованных процессов $A=(A_t)$ с п. н. конечной вариацией на любом отрезке $[0, t]$. (Они представимы в виде $A=A^r+A^g$, где A^r и $A^g=\sum\limits_{s<t}\Delta^+A_s$ — регулярный и непрерывный слева процессы с конечной вариацией соответственно).

A — множество процессов $A=(A_t)$, $t\in R_+$, $A\in V$ с интегрируемой вариацией, т. е. $M[\sum\limits_{0<s<\infty}|\Delta^+A_s|+\int\limits_{[0,\infty[}|dA_s^r|]<\infty$, где $\mathrm{Var}A^r=\int|dA_s^r|$.

A_{loc} — множество процессов с локально интегрируемой вариацией, т. е. процессов $A=(A_t)$, $t\in R_+$, для каждого из которых существует последовательность (R_n), $R_n\in T_+$, $n\in N$ такая, что $AI_{[0,R_n]}\in A$, где $I_{[0,R_n]}$ — индикатор стохастического интервала $[0, R_n]=(\omega, t: 0\leqslant t\leqslant R_n(\omega))$.

$\mathcal{M}^k$—множество (опциональных) мартингалов, т. е. опциональных процессов $m=(m_t)$, $t\in R_+$, для каждого из которых существует с. в. $\tilde{m}$, что $M|\tilde{m}|^k<\infty$, $m_T=M[\tilde{m}|F_T]$ п. н. на множестве $(T<\infty)$ для любого $T\in\mathcal{T}$, $k=1,2$, где F_T —σ-алгебра, порожденная такими элементами A σ-алгебры $F_\infty=\bigvee_{t<\infty}F_t$, что при всяком $t\in R_+$ множество $A\cap(T\leq t)\in F_t$ (см. [4]).

$\mathcal{M}^k_{loc}$—множество (опциональных) локальных мартингалов, т. е. опциональных процессов $m=(m_t)$, $t\in R_+$, для каждого из которых существует последовательность $(R_n,\ m^{(n)})$, где $R_n\in\mathcal{T}_+$, $m^{(n)}\in\mathcal{M}^k$, $R_n\uparrow\infty$ п. н. так, что $m=m^{(n)}$ на множестве $[0,\ R_n]$ и $M|m_{R_n+}|<\infty$ для любого $n\in N$.

$\mathcal{M}^{k,1}_{loc}$ ($\mathcal{M}^{k,2}_{loc}$) —множество непрерывных справа (слева) процессов из $\mathcal{M}^k_{loc}$. Если H—некоторое пространство одномерных процессов, а $X=(X^1, \ldots, X^n)$ — n-мерный процесс, то под $X\in H$ подразумевается, что $X^j\in H$ $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Предсказуемый процесс $X=(X_t)$ называется сильно предсказуемым, если он имеет пределы справа и процесс $X_+=(X_{t+})$ является опциональным. Семимартингал (опциональный) $X=M+A$ называется специальным, если $A\in\mathcal{A}_{loc}$, $M\in\mathcal{M}^1_{loc}$. Из [5] следует, что специальный семимартингал X имеет вышеприведенное представление с сильно предсказуемым процессом $A\in\mathcal{A}_{loc}$ и это представление единственно.

Измеримое множество D в произведении пространств $(\Omega\times R_+,\ F\times\times\mathcal{B}(R_+))$, где $\mathcal{B}(R_+)$— борелевская σ-алгебра на R_+, назовем пренебрежимым, если $P(\pi(D))=0$, где $\pi(D)$—проекция множества D на Ω. Множество $\pi(D)\in F$, т. к. F —пополненная σ-алгебра (см. [4], гл. I, теорему 32).

Говорят, что измеримые процессы $X=(X_t)$ и $Y=(Y_t)$ неразличимы, если множество $(\omega,t: X_t(\omega)\neq Y_t(\omega))$ пренебрежимо. Условимся, что в дальнейшем, утверждая равенства, мы будем подразумевать, что они выполняются с точностью до неразличимости. Отметим здесь, что $\mathcal{P}=\mathcal{P}_+$, $\tilde{\mathcal{P}}=\tilde{\mathcal{P}}_+$ и $\mathcal{T}^p=\mathcal{T}^p_+$ (см. [6] гл. IV, теорему 78). Скажем, что последовательность м. о. (T_n), $T_n\in\mathcal{T}_+$, $n\in N$, поглощает скачки процесса $X=(X_t)$, $t\in R_+$, если для любого $T\in\mathcal{T}_+$, для которого множество $[T]\cap(\bigcup_n[T_n])$ пренебрежимо, имеем $\Delta X_T=\Delta^+X_T=0$ п. н. на множестве $(T<\infty)$, где $[T]=(\omega,\ t:\ T(\omega)=t,\ t<\infty)$—график м. о. T. Пусть $X=(X_t)$ —n-мерный семимартингал. Известно (см. [3]), что существуют последовательности м. о. (S_n), (T_n), (U_n), поглощающие скачки процесса X, где $S_n\in\mathcal{T}^p$, $T_n\in\mathcal{T}^i$, $U_n\in\mathcal{T}^i_+$, $P(U_n=T<\infty)=0$ для любых $n\in N$, $T\in\mathcal{T}$. Обозначим $\tilde{\Omega}=\Omega\times\times R_+\times E$, $\tilde{E}=R_+\times E$, $\tilde{\mathcal{E}}=\mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{E}$.

Неотрицательная случайная функция множеств $\mu(\omega,\ \Gamma)$, $\omega\in\Omega$, $\Gamma\in\tilde{\mathcal{E}}$, называется случайной мерой на $\tilde{\mathcal{E}}$, если $\mu(\cdot,\ \Gamma)\in F$ для любого $\Gamma\in\tilde{\mathcal{E}}$ и $\mu(\omega,\ \cdot)$ является σ-конечной мерой на $(\tilde{E},\tilde{\mathcal{E}})$ для каждого $\omega\in\Omega$. Случайная мера μ называется целочисленной, если $\mu(\omega,\Gamma)\in N\cup\{+\infty\}$ и $\mu(\omega,$

$\{t\}\times E)\leq 1$ для любых $\omega\in\Omega$, $t\in R_+$, $\Gamma\in\tilde{E}$. Будем говорить, что случайная мера $\mu(\omega,\cdot)$ на $\tilde{E}$ является опциональной (O_+-опциональной), если процесс $f_*\mu_t=\int\limits_{[0,t]\times E} f(s,x)\mu(ds,dx)$ опциональный (O_+-опциональный) для любой неотрицательной функции $f\in\tilde{O}$ ($f\in\tilde{O}_+$). Случайная мера $\mu(\omega,\cdot)$ на $\tilde{E}$ предсказуема, если процесс $f_*\mu_t$ предсказуем для любой функции $f\in\tilde{P}$, $f\geq 0$.

Пусть μ—опциональная (O_+-опциональная) мера. Определим на $(\tilde{\Omega},\tilde{O})$ (соответственно на $(\tilde{\Omega},\tilde{O}_+)$) меру M^P_μ, полагая $M^P_\mu(f)=Mf_*\mu_\infty$ для любой функции $f\in O$ (соответственно $f\in O_+$), $f\geq 0$. Предположим, опциональная (O_+-опциональная) мера μ такова, что M^P_μ является $\tilde{P}$ (соответственно $\tilde{O}$) σ-конечной, т. е. сужение меры M^P_μ на $(\tilde{\Omega},\tilde{P})$ (соответственно на $(\tilde{\Omega},\tilde{O})$) σ-конечно. Тогда существует единственная предсказуемая (соответственно опциональная) мера ν на $\tilde{E}$, что для произвольной неотрицательной функции $f\in\tilde{P}$ (соответственно $f\in\tilde{O}$), $M^P_\mu(f)=M^P_\nu(f)$ (см. [5] и [7]). Процесс $f_*\nu$ (соответственно $f_*\nu_+$) является двойственной предсказуемой (соответственно опциональной) проекцией для процесса $f_*\mu$ (соответственно $f_*\mu_+$), где $f\in\tilde{P}(f\in\tilde{O})$, $f\geq 0$. Если $f_*\mu\in A_{loc}$ (соответственно $f_*\mu_+\in A_{loc}$), то процесс $f_*\mu-f_*\nu\in M^1_{loc}$. Мера ν называется компенсатором опциональной (соответственно O_+-опциональной) меры μ.

Определим теперь по скачкам заданного опционального семимартингала X целочисленные случайные меры на множествах $\Gamma\in B(R_+)\times E$:

$$\mu^1(\Gamma)=\sum_n I_\Gamma(T_n,\Delta X_{T_n}),\quad \mu^2(\Gamma)=\sum_n I_\Gamma(U_n,\Delta^+X_{U_n}),\quad \eta(\Gamma)=\sum_n I_\Gamma(T_n,\Delta^+X_{T_n}),$$

$$p^1(\Gamma)=\sum_n I_\Gamma(S_n,\Delta X_{S_n}),\quad p^2(\Gamma)=\sum_n I_\Gamma(S_n,\Delta^+X_{S_n}),$$

где $I_\Gamma(x)$ — индикатор множества Γ. Обозначим через ν^i, λ, q^i компенсаторы мер μ^i, η, p^i соответственно, где μ^1, p^1 — опциональные, а μ^2, η, p^2 —O_+—опционалные меры (см. [5] и [7]), $i=1,2$. Введем следующие пространства функций (ср. [1]):

$$H'(\mu^1)=\{h\in\tilde{P}:M[|h|^2_*\mu^1_\infty]^{1/2}<\infty\},\quad H'(\mu^2)=\{h\in\tilde{O}:M[|h|^2_*\mu^2_\infty]^{1/2}<\infty\},$$

$$H''(\rho)=\{l\in\tilde{O}:|l|_*\rho\in V\},\quad \text{где } \rho=\mu^1,\ \eta,\ p^1;\ \theta\text{— его компенсатор},$$

$$H'(p^1)=\{k\in\tilde{P}:M[|k|^2_*p^1_\infty]^{1/2}<\infty \text{ и } M[k(S,\Delta X_S)|F_{S-}]=0 \text{ п. н. на } (S<\infty)\},$$

$$H'(p^2)=\{k\in\tilde{O}:M[|k|^2_*p^2_\infty]^{1/2}<\infty \text{ и } M[k(S,\Delta^+X_S)|F_S]=0 \text{ п. н. на } (S<\infty)\},$$

$$H'(\eta)=\{k\in\tilde{O}:M[|k|^2_*\eta_\infty]^{1/2}<\infty \text{ и } M[k(T,\Delta^+X_T)|F_T]=0 \text{ п. н. на } (T<\infty)\},$$

для любого $S\in T^P$, $S\in T$, $T\in T^1$ соответственно.

Если $h\in H'_{loc}(\mu^1)$, $l\in H'_{loc}(p^1)$, $l\in H'_{loc}(\eta)$ (соответственно $l\in H''_{loc}(\rho)$), то можно определить стохастические интегралы $h_*(\mu^1-\nu^1)$, l_*p^1, $l_*\eta$ (соответственно $l_* \rho$) (см. [8], [9]). Под интегралом $l_* \rho_t$ понимается ряд $\sum\limits_{R_n < t} l(R_n, \Delta X_{R_n})$ (или $\sum\limits_{R_n<t} l(R_n, \Delta^+ X_{R_n})$), где R_n — м. о., соответствующие мере ρ. При $l \in H'_{loc}(p^1)$, $l \in H'_{loc}(\eta)$ эти ряды сходятся п. н. для любого t, если же $l \in H''_{loc}(\rho)$, то ряды сходятся локально абсолютно п. н.

Приведем свойства интегралов $h_*(\mu^i - \nu^i)$ при $h \in H'_{loc}(\mu^i)$:

1. $h_*(\mu^i - \nu^i) \in M^{1,i}_{loc}$; если $|h|^2_* \mu^i \in A_{loc}$, то $h_*(\mu^i - \nu^i) \in M^{2,i}_{loc}$;
2. если $|g|^2_* \mu^i \in A_{loc}$, $|h|^2_* \mu^i \in A_{loc}$, то $\langle g_*(\mu^i - \nu^i), h_*(\mu^i - \nu^i)\rangle = (gh)_* \nu^i$;
3. для любых $T \in T$ и $U \in T_+$, $\Delta h_*(\mu^1 - \nu^1)_T = \Sigma h(T_n, \Delta X_{T_n}) I_{T=T_n}$, $\Delta^+ h_*(\mu^2 - \nu^2)_T = \Sigma h(U_n, \Delta^+ X_{U_n}) I_{U_n = U}$ п. н. на множествах $(T < \infty)$ и $(U < \infty)$ соответственно.

Свойства интегралов $l_* p^i (l_* \eta)$ при $l \in H'_{loc}(p^i) (l \in H'_{loc}(\eta))$:

1. $l_* p^i \in M^{1,i}_{loc} (l_* \eta \in M^{1,2}_{loc})$; если $|l|^2_* p^i \in A_{loc} (|l|^2_* \eta \in A_{loc})$, то $l_* p^i \in M^{2,i}_{loc}$ $(l_* \eta \in M^{2,2}_{loc})$;
2. если $|k|^2_* p^i \in A_{loc}$, $|l|^2_* p^i \in A_{loc}$ $(|k|^2_* \eta \in A_{loc}$, $|l|^2_* \eta \in A_{loc})$, то $\langle k_* p^i, l_* p^i \rangle = (kl)_* \lambda^i$ $(\langle k_* \eta, l_* \eta \rangle = (kl)_* \eta)$;
3. для любого $T \in T$, $\Delta l_* p^1_T = \Sigma l(S_n, \Delta X_{S_n}) I_{T=S_n}$, $\Delta^+ l_* p^2_T = \Sigma l(S_n, \Delta^+ X_{S_n}) I_{T=S_n}$ $(\Delta^+ l_* \eta_T = \Sigma l(T_n, \Delta^+ X_{T_n}) I_{T=T_n})$ п. н. на множестве $(T < \infty)$.

Свойства интегралов $l_* \rho$ при $l \in H''_{loc}(\rho)$:

1. $l_* \rho \in V$;
2. если: а) $\rho = \mu^1$, p^1; $l \in \tilde{P}$ и $|l|_* \rho \in A_{loc}$, то $M l_* \rho = M l_* \theta$;

   б) $\rho = \mu^2$, p^2, η; $l \in \tilde{O}$ и $|l|_* \rho_+ \in A_{loc}$, то $M l_* \rho = M l_* \theta$;
3. для любых $T \in T$ $(U \in T_+)$, $\Delta l_* \rho_T = \Sigma l(R_n, \Delta X_{R_n}) I_{T=R_n}$ $(\Delta^+ l_* \rho_U = \Sigma l(R_n, \Delta^+ X_{R_n}) I_{U=R_n})$ п. н. на множествах $(T < \infty)$ и $(U < \infty)$ соответственно.

2. Представление опциональных семимартингалов

Теорема. Пусть $X = (X^1, \ldots, X^n)$ — n-мерный опциональный семимартингал. Тогда имеет место следующее представление (ср. [1]):

$$X = X_0 + a + m + U_*(\mu - \nu) + V_* \mu + W_* p + W_* \eta, \tag{2}$$

где a и m — непрерывные процессы, $a_0 = m_0 = 0$, $a \in A_{loc}$, $m \in M^2_{loc}$, $U(\omega, t, u) \equiv u I_{|u| < 1}$, $V(\omega, t, u) \equiv u I_{|u| > 1}$, $W(\omega, t, u) \equiv u$, $U_*(\mu - \nu) \equiv \sum\limits_{i=1}^{2} U_*(\mu^i - \nu^i)$,

$$V_* \mu = \sum_{i=1}^{2} V_* \mu^i, \quad W_* p = \sum_{i=1}^{2} W_* p^i, \quad U_*(\mu^i - \nu^i) \in M^{2,i}_{loc}, \ V_* \mu^i \in V, \ W_* p^1_t = \sum_{S_n \leqslant t} \Delta X_{S_n},$$

$W_* p^2_t = \sum\limits_{S_n < t} \Delta^+ X_{S_n}$, $W_* \eta = \sum\limits_{T_n < t} \Delta^+ X_{T_n}$, ряды сходятся п. н. для любого $t < \infty$, а $W_* p^i$, $W_* \eta$ — семимартингалы.

Доказательство. Пусть $X = X_0 + A + M$, где $A \in V$, $M \in M'_{loc}$. Представим семимартингал X в виде $X = X^{(1)} + X^{(2)}$, где $X_t^{(1)} = X_0 + \sum\limits_{0 < s \leqslant t} \Delta X_s I_{|\Delta X_s| > 1}$

$+\sum_{0\le s<t}\Delta^+X_s I_{|\Delta^+X_s|>1}$, $X_t^{(2)}=X_t-X_t^{(1)}$. Так как $X^{(1)}\in V$, процесс $X^{(2)}$ также является семимартингалом: $X^{(2)}=M^{(2)}+A^{(2)}$, где $M^{(2)}=M$, $A^{(2)}=A-X^{(1)}\in V$. Покажем, что $A^{(2)}\in\mathcal{A}_{loc}$. Представим $A^{(2)}$ в виде $A^{(2)}=A^{g,2}+A^{r,2}$, где $A_t^{g,2}=\sum_{s<t}\Delta^+A_s^{(2)}$ $(A_t^{r,2})$ — непрерывный слева (справа) процесс конечной вариации, а ряд абсолютно сходится п. н. Положим $\tau_n=\inf(t:\int_{[0,t]}|dA_s^{r,2}|\ge n)$, $\rho_n=\inf\left(t:\int_{[0,t[}|dA_{s+}^{g,2}|\ge n\right)$. Для любого $n\in N$, $\tau_n\in T$, $\rho_n\in T_+$. Далее, в силу [3] (см. лемму 4.6.) существует последовательность м. о. (σ_n), $\sigma_n\in T_+$, $\sigma_n\uparrow\infty$, так что скачки процесса $M^{(2)}$ интегрируемы на $[0,\sigma_n]$ при любом $n\in N$. Положим теперь $R_n=\tau_n\wedge\rho_n\wedge\sigma_n$, $R_n\in T_+$, $R_n\uparrow\infty$ п. н., так что имеем

$M\int_{[0,R_n]}|dA_s^{r,2}|\le M\left[\int_{[0,R_n[}|dA_s^{r,2}|+|\Delta A^{r,2}_{R_n}|\right]\le n+M|\Delta A^{r,2}_{R_n}|$. Но т. к. $|\Delta A^{r,2}_{R_n}|\le |\Delta X^{(2)}_{R_n}-\Delta M^{(2)}_{R_n}|\le 1+|\Delta M^{(2)}_{R_n}|$, то $M\int_{[0,R_n]}|dA_s^{r,2}|\le n+1+M|\Delta M^{(2)}_{R_n}|<\infty$. Следовательно, $A^{r,2}\in\mathcal{A}_{loc}$; $M\int_{[0,R_n]}|dA^{g,2}_{s+}|\le n+1+M|\Delta^+M^{(2)}_{R_n}|<\infty$, т. к. процесс $\int_{[0,t[}|dA^{g,2}_{s+}|$ непрерывен слева, значит, и $A^{g,2}\in A_{loc}$. Отсюда следует, что $X^{(2)}$ — специальный семимартингал. Пусть $X^{(2)}=A^{(2)}+M^{(2)}$ — разложение с сильно предсказуемым процессом $A^{(2)}\in\mathcal{A}_{loc}$, $M^{(2)}\in\mathcal{M}^1_{loc}$. Тогда имеем $X=X^{(2)}+X^{(1)}=A^{(2)}+M^{(2)}+V_*\mu+V_*p+V_*\eta$, где $V_*\mu=\sum_{i=1}^2 V_*\mu^i$, $V_*p=\sum_{i=1}^2 V_*p^i$, $V_*\mu_t^1=\sum_{T_n\le t}\Delta X_{T_n}I_{|\Delta X_{T_n}|>1}$, $V_*\mu_t^2=\sum_{U_n<t}\Delta^+X_{U_n}I_{|\Delta^+X_{U_n}|>1}$, $V_*\eta_t=\sum_{T_n<t}\Delta^+X_{T_n}I_{|\Delta^+X_{T_n}|>1}$, $V_*p_t^1=\sum_{S_n\le t}\Delta X_{S_n}I_{|\Delta X_{S_n}|>1}$, $V_*p_t^2=\sum_{S_n<t}\Delta^+X_{S_n}I_{|\Delta^+X_{S_n}|>1}$. Согласно [3] (лемма 4.9) имеет место разложение $M^{(2)}=\tilde M^{(2)}+\tilde{\tilde M}^{(2)}$, где $\tilde M^{(2)}\in\mathcal M^2_{loc}$, $\tilde{\tilde M}^{(2)}\in\mathcal M^1_{loc}\cap\mathcal A_{loc}$. Тогда для (S_n), $S_n\in T^p$ имеем (см. [3], следствие 4.4) $B_t=(\sum_{S_n\le t}\Delta\tilde M^{(2)}_{S_n})\in\mathcal M^{2,1}_{loc}$, $Y_t=(\sum_{S_n\le t}\Delta\tilde{\tilde M}^{(2)}_{S_n})\in\mathcal A_{loc}$, $Z_t=(\sum_{S_n\le t}\Delta A^{(2)}_{S_n})\in\mathcal A_{loc}$, т. е. процесс $B_t+Y_t+Z_t+V_*p_t^1=(\sum_{S_n\le t}\Delta X_{S_n})=W_*p_t^1$ определен, является непрерывным справа семимартингалом со скачками, происходящими в моменты S_n и $\Delta W_*p^1_{S_n}=\Delta X_{S_n}$. Аналогично $B_t^1=(\sum_{S_n<t}\Delta^+\tilde M^{(2)}_{S_n})\in\mathcal M^{2,2}_{loc}$, $Y_t^1=(\sum_{S_n<t}\Delta^+\tilde{\tilde M}^{(2)}_{S_n})\in\mathcal A_{loc}$, $Z_t^1=(\sum_{S_n<t}\Delta^+A^{(2)}_{S_n})\in A_{loc}$, т. е. процесс $B_t^1+Y_t^1+Z_t^1+V_*p_t^2=(\sum_{S_n<t}\Delta^+X_{S_n})=W_*p_t^2$ определен, является семимартингалом, непрерывным слева со скачками, происходящими в моменты S_n и $\Delta^+W_*p^2_{S_n}=\Delta^+X_{S_n}$. На-

конец для последовательности (T_n), $T_n \in \mathcal{T}^1$ имеем $B_t^1 = (\sum_{T_n<t} \Delta^+ \tilde{M}^{(2)}_{T_n}) \in \mathcal{M}^{2,2}_{loc}$,

$Y_t^1 = (\sum_{T_n<t} \Delta^+ \tilde{\tilde{M}}^{(2)}_{T_n}) \in \mathcal{A}_{loc}$, т. е. процесс $B_t^1 + Y_t^1 + V_* \eta_t = \sum_{T_n<t} \Delta^+ X_{T_n} - W_* \eta_t$ — определен, является семимартингалом, непрерывным слева со скачками, происходящими в моменты T_n и $\Delta^+ W_* \eta_{T_n} = \Delta^+ X_{T_n}$. Ряды B, B^1, B^2 сходятся п. н. при любом $t \in R_+$ (см. [3], следствие 4.4). В работе [10] доказано, что $|U|^2_* \nu^1 \in \mathcal{A}_{loc}$. Это эквивалентно тому, что $|U|^2_* \mu^1 \in \mathcal{A}_{loc}$, значит, определен стохастический интеграл $U_*(\mu^1 - \nu^1) \in \mathcal{M}^{2,1}_{loc}$. Процесс $U|^2_* \mu_t^2$ непрерывен слева и конечен для любого $t \in R_+$, действительно:

$$U|^2_* \mu_t^2 = \sum_{U_n<t} |\Delta^+ X_{U_n}|^2 I_{|\Delta^+ X_{U_n}| \leq 1} < \sum_{s<t} |\Delta^+ X_s|^2 < 2(\sum_{s<t} |\Delta^+ \tilde{X}_s|^2 +$$

$$+ (\sum_{s<t} |\Delta^+ \tilde{\tilde{X}}_s|)^2) < \infty,$$ где $X = \tilde{X} + \tilde{\tilde{X}}$, $\tilde{X} \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $\tilde{\tilde{X}} \in \mathcal{M}^1_{loc} \cap \mathcal{A}_{loc}$ (см. [3], лемму 4.9). Положим $T'_N = \inf\{t>0 : \sum_{u_n<t} |\Delta^+ X_{U_n}|^2 I_{|\Delta^+ X_{U_n}| \leq 1} > N\}$. Отсюда следует, что $T'_N \in \mathcal{T}_+$ для любого N, $T_N \uparrow \infty$ п. н. Имеем, что $M|U|^2_* \mu^2_{T'_N} < N$, т. е. $|U|^2_* \mu^2 \in \mathcal{A}_{loc}$, следовательно, определен также и стохастический интеграл $U_*(\mu^2 - \nu^2) \in \mathcal{M}^{2,2}_{loc}$.

Рассмотрим теперь процесс

$$\tilde{X} = X - W_* \eta - W_* p - V_* \mu - U_*(\mu - \nu). \tag{3}$$

Легко видеть, что он является непрерывным семимартингалом. Так же, как и выше, можно показать, что $\tilde{X}$ является специальным семимартингалом, т. е

$$\tilde{X} = X_0 + a + m, \tag{4}$$

где $a \in \mathcal{A}_{loc}$, a—сильно предсказуемый процесс, $m \in \mathcal{M}^1_{loc}$. Покажем, что a и m—непрерывные процессы. Имеем $\Delta \tilde{X}_S = \Delta a_S + \Delta m_S = 0$, где $S \in \mathcal{T}^p$ и т. к. a—сильно предсказуемый процесс, то его скачки имеют вид Δa_S, $\Delta^+ a_S$, $\Delta^+ a_T$, где $S \in \mathcal{T}^p$, $T \in \mathcal{T}$. Величина Δa_S (а значит, и Δm_S), является $\mathcal{F}_{S-}$-измеримой для любого $S \in \mathcal{T}^p$ (см. [11]). Отсюда для любого $S \in \mathcal{T}^p$ имеем $\Delta m_S = M[\Delta m_S | \mathcal{F}_{S-}] = 0$ п. н. на множестве $(S<\infty)$. С другой стороны, $\Delta^+ \tilde{X}_S = \Delta^+ a_S + \Delta^+ m_S = 0$, и, т. к. $\Delta^+ a_S$ является $\mathcal{F}_S$-измеримой для любого $S \in \mathcal{T}$, имеем согласно [4] (гл. VI, теорема 4), что $^+ m_S = M[\Delta^+ m_S | \mathcal{F}_S] = 0$ п. н. на множестве $(S<\infty)$. Аналогично $\Delta^+ m_T = M[\Delta^+ m_T | \mathcal{F}_T] = 0$ п. н. на множестве $(T<\infty)$ для $T \in \mathcal{T}$. По теореме о сечении (см. [6], гл. IV, теорему 84) получаем, что почти все траектории процесса m (а значит, и a) непрерывны. Утверждение теоремы теперь непосредственно следует из (3) и (4).

3. Формула замены переменных

Предположим, что для $j = 1, \ldots, n$ заданы семимартингалы

$$Y^j = Y_0^j + a^j + m^j + h^j I_{|h|<1} * (\mu - \nu) + h^j I_{|h|>1} * \mu + [k^j + l^j] * p + [\hat{k}^j + \hat{l}^j] * \eta, \qquad (5)$$

где Y_0 — F_0 измеримая с. в., $h^j I_{|h|<1} * (\mu - \nu) \equiv \sum_{i=1}^{2} h_i^j I_{|h|<1} * (\mu^i - \nu^i)$, $h^j I_{|h|>1} * \mu \equiv$ $\equiv \sum_{i=1}^{2} h_i^j I_{|h_i|>1} * \mu^i$, $[k^j + l^j] * p \equiv \sum_{i=1}^{2} [k_i^j + l_i^j] * p^i$, $h_1 = (h_1^1, \ldots, h_1^n) \in \tilde{P}$, $h_2 \in \tilde{O}$, $|h_i|^2 I_{|h_i|\leqslant 1} * \mu^i \in A_{loc}, h_i I_{|h|>1} \in H''(\mu^i)$, $k_i \in H'(p^i)$, $\hat{k} \in H'(\eta)$, $l_i \in H''(p^i)$, $\hat{l} \in H''(\eta)$.

Теорема. Пусть семимартингал $Y = (Y^1, \ldots, Y^n)$ задан соотношениями (5), а функция $F(y) = F(y^1, \ldots, y^n)$ дважды непрерывно дифференцируемая на R_n. Тогда процесс $F(Y) = (F(Y_t))$ является семимартингалом и имеет следующее представление (ср. [1]):

$$F(Y) = F(Y_0) + \sum_{j=1}^{n} D^j F(Y_-) \cdot (a^j + m^j) + \frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^{n} D^j D^s F(Y_-) \cdot \langle m^j, m^s \rangle +$$

$$+ F_h I_{|h|<1} * (\mu - \nu) + \left[F_h - \sum_{j=1}^{n} h^j D^j F(Y) \right] I_{|h|<1} * \nu + F_h]_{|h|>1} * \mu + F_{k+l} * p +$$

$$+ F^{(2)}_{\hat{k}+\hat{l}} * \eta,$$

где $F_h I_{|h|<1} * (\mu - \nu) \equiv \sum_{i=1}^{2} F_{h_i}^{(i)} I_{|h_i|<1} * (\mu^i - \nu^i)$, $\left[F_h - \sum_{j=1}^{n} h^j D^j F(Y) \right] I_{|h|<1} * \nu \equiv$

$$\equiv \left[F_{h_1}^{(1)} - \sum_{j=1}^{n} h_1^j D^j F(Y_-) \right] I_{|h_1|<1} * \nu^1 + \left[F_{h_2}^{(2)} - \sum_{j=1}^{n} h_2^j F(Y) \right] I_{|h_2|<1} * \nu^2, \quad F_h I_{|h|>1} * \mu \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{2} F_{h_i}^{(i)} I_{|h_i|>1} * \mu^i, \quad F_{k+l} * p \equiv \sum_{i=1}^{2} F_{k_i + l_i}^{(i)} * p^i, \quad F_h^{(1)}(t,x) \equiv F(Y_{t-} + h(t,x)) -$$

$$- F(Y_{t-}), \qquad F_h^{(2)}(t, x) \equiv F(Y_t + h(t, x)) - F(Y_t).$$

Доказательство. Из формулы замены переменных (1), учитывая вид (5) семимартингала Y, имеем

$$F(Y_t) - F(Y_0) = \sum_{j=1}^{n} [D^j F(Y_-) \cdot (a^j + m^j)_t + D^j F(Y_-) h_1^j I_{|h_1|<1} * (\mu^1 - \nu^1)_t +$$

$$+ D^j F(Y_-) h_1^j I_{|h_1|>1} * \mu_t^1 + D^j F(Y_-)(k_1^j + l_1^j) * p_t^1] + \frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^{n} D^j D^s F(Y_-) \cdot \langle m^j, m^s \rangle_t +$$

$$+ \sum_{s<t} \left[F(Y_s) - F(Y_{s-}) - \sum_{j=1}^{n} D^j F(Y_{s-}) \Delta Y_s^j \right] + \sum_{j=1}^{n} \left[D^j F(Y) h_2^j I_{|h_2|<1} * (\mu^2 - \nu^2) + \right.$$

$$\left. + D^j F(Y) h_2^j I_{|h_2|>1} * \mu_t^2 + D^j F(Y)(k_2^j + l_2^j) * p_t^2 + D^j F(Y)(\hat{k}^j + \hat{l}^j) * \eta_t \right] +$$

$$+ \sum_{s<t} \left[F(Y_{s+}) - F(Y_s) - \sum_{j=1}^{n} D^j F(Y_s) \Delta^+ Y_s^j \right]. \qquad (6)$$

Преобразуем слагаемые $\sum_{s<t}[\cdot]$ и $\sum_{s<t}[\cdot]$ из (6). Обозначим $C_t = \sum_{s<t}[\cdot]$, $B_t = \sum_{s<t}[\cdot]$ и представим их в виде $C_t = \sum_{i=1}^{3} C_t^i$, $B_t = \sum_{j=1}^{4} B_t^j$, где $C^t = \sum_{T_n \leqslant t} [\cdot] T_n \cdot$

$\cdot I_{|\Delta Y_{T_n}|\leqslant 1}$, $C^2_t=\sum\limits_{T_n\leqslant t}[\cdot]_{T_n} I_{|\Delta Y_{T_n}|>1}$, $C^3_t=\sum\limits_{S_n\leqslant t}[\cdot]_{S_n}$, $B^1_t=\sum\limits_{U_n<t}[\cdot]_{U_n}\cdot$
$\cdot I_{|\Delta^+ Y_{U_n}|\leqslant 1}$, $B^2_t=\sum\limits_{U_n<t}[\cdot]_{U_n} I_{|\Delta^+ Y_{U_n}|>1}$, $B^3_t=\sum\limits_{S_n<t}[\cdot]_{S_n}$, $B^4_t=\sum\limits_{T_n<t}[\cdot]_{T_n}$.
Процессы C^1—C^3, B^1—B^4 принадлежат пространству V (см. [3], теорему 8.2). Представим их в виде стохастических интегралов.

1. Положим $\sigma^1_N=\inf(t>0:\int\limits_{[0,t]}|dC^1_s|\geqslant N$ или $|Y_{t-}|>N$, $\sigma^2_N=\inf(t>0:$ $:\int\limits_{[0,t[}|dB^1_{s+}|>N$ или $|Y_{t+}|>N)$. Для любого N, $\sigma^1_N\in T$, $\sigma^2_N\in T_+$ и $\sigma^1_N\uparrow\infty$, $\sigma^2_N\uparrow\infty$ п. н. при $n\to\infty$ $\int\limits_{[0,\sigma^1_N]}|dC^1_t|=\int\limits_{[0,\sigma^1_N[}|dC^1_t|+\Delta C^1_{\sigma^1_N}\leqslant N+K$, где $K=\max\limits_{|y|\leqslant N+1}(2F(y)+$ $+|F'(y)|)$, т. к. $|Y_{\sigma^1_N}|\leqslant|Y_{\sigma^1_N-}|+|\Delta Y_{\sigma^1_N}|\leqslant N+1$, значит, $M\int\limits_{[0,\sigma^1_N]}|dC^1_t|<\infty$.

Кроме того, ясно, что $\int\limits_{[0,\sigma^2_N]}|dB^1_{t+}|\leqslant N$, т. е. $C^1\in A_{loc}$ и $B^1\in A_{loc}$. Функции $F(Y_-+$ $+h_1)-F(Y_-)-\sum\limits_{j=1}^n h_1^j D^j F(Y_-)$ и $F(Y+h_2)-F(Y)-\sum\limits_{j=1}^n h_2^j D^j F(Y)$ являются $\tilde{P}$ и $\tilde{O}$ измеримыми соответственно. Из [6] легко видеть, что $\Delta Y_{T_n}=$ $=h_1(T_n)$, $\Delta^+ Y_{T_n}=h_2(T_n)$, т. е. $F(Y_{T_n})=F(Y_{T_n-}+h_1(T_n))$, $F(Y_{T_{n+}})=$ $=F(Y_{T_n}+h_2(T_n))$. Далее, из того, что $C^1\in A_{loc}$, $B^1\in A_{loc}$ и из свойств стохастических интегралов по мерам μ^i следует, что C^1 и B^1 можно записать в виде

$$C^1=\left[F^{(1)}_{h_1}-\sum_{j=1}^n h_1^j D^j F(Y_-)\right] I_{|h_1|\leqslant 1}*(\mu^1-\nu^1)\left[F^{(1)}_{h_1}-\sum_{j=1}^n h_1^j D^j F(Y_-)\right] I_{|h_1|\leqslant 1}*\nu^1,$$

$$B^1=\left[F^{(2)}_{h_2}-\sum_{j=1}^n h_2^j D^j F(Y)\right] I_{|h_2|\leqslant 1}*(\mu^2-\nu^2)+\left[F^{(2)}_{h_2}-\sum_{j=1}^n h_2^j D^j F(Y)\right] I_{|h_2|\leqslant 1}*\nu^2,$$

где первые слагаемые в этих формулах принадлежат $M^{1,1}_{loc}$ и $M^{1,2}_{loc}$ соответственно, а вторые—A_{loc}. Теперь, используя формулу конечных приращений, для любого n имеем на множествах $(\sigma^1_N<\infty)$ и $(\sigma^2_N<\infty)$ соответственно

$$|F^{(1)}_{h_1}(T_n,\Delta Y_{T_n})|^2 I_{(|h_1|\leqslant 1,\ T_n\leqslant\sigma^1_N)}\leqslant(\max_{|y|\leqslant N+1}|F'(y)|)|h_1(T_n,\Delta Y_{T_n})|^2\times$$
$$\times I_{(|h_1|\leqslant 1,\ T_n\leqslant\sigma^1_N)},$$

$$|F^{(2)}_{h_2}(U_n,\Delta^+ Y_{U_n})|^2 I_{(|h_2|\leqslant 1,\ U_n\leqslant\sigma^2_N)}\leqslant(\max_{|y|<N+1}|F'(y)|)|h_2(U_n,\Delta^+ Y_{U_n})|^2\times$$
$$\times I_{(|h_2|\leqslant 1,\ U_n\leqslant\sigma^2_N)},$$

принимая во внимание во втором неравенстве, что $|Y_{U_n}|\leqslant|Y_{U_{n+}}|+$ $+|\Delta^+ Y_{U_n}|\leqslant N+1$. После суммирования каждого из этих неравенств по n, получим

$$|F^{(1)}_{h_1}| I_{|h_1|\leqslant 1} * \mu^1_{\sigma^1_N} \leqslant (\max_{|y|<N+1} |F'(y)|)|h_1|^2 I_{|h_1|\leqslant 1} * \mu^1_{\sigma^1_N}.$$

Из этих неравенств согласно предположениям о функциях h_1 имеем $|F^{(1)}_{h_1}|^2 I_{|h_1|\leqslant 1}*\mu^1 \in A_{loc}$ и в силу свойства I стохастических интегралов по мерам $\mu^1-\nu^1$ получаем $F^{(1)}_{h_1} I_{|h_1|\leqslant 1}*(\mu^1-\nu^1)\in \mathcal{M}^{2,1}_{loc}$. Из неравенства Коши-Буняковского выводим, что

$$\left|\sum_{j=1}^{n} h^j_1 D^j F(Y_-) I_{|h_1|\leqslant 1}\right|^2 * \mu^1 \in A_{loc} \text{ и } \left|\sum_{j=1}^{n} h^j_2 D^j F(Y) I_{|h_2|\leqslant 1}\right|^2 * \mu^2 \in A_{loc},$$

значит

$$\sum_{j=1}^{n} h^j_1 D^j F(Y_-) I_{|h_1|\leqslant 1} * (\mu^1-\nu^1) \in \mathcal{M}^{2,1}_{loc} \text{ и } \sum_{j=1}^{n} h^j_2 D^j F(Y) I_{|h_2|\leqslant 1} * (\mu^1-\nu^1) \in \mathcal{M}^{2,2}_{loc}.$$

Из полученного ранее вида для C^1 и B^1 имеем

$$C^1 = F^{(1)}_{h_1} I_{|h_1|\leqslant 1} * (\mu^1-\nu^1) - \left[\sum_{j=1}^{n} h^j_1 D^j F(Y_-)\right] I_{|h_1|\leqslant 1} * (\mu^1-\nu^1) +$$
$$+ \left[F^{(1)}_{h_1} - \sum_{j=1}^{n} h^j_1 D^j F(Y_-)\right] I_{|h_1|\leqslant 1} * \nu^1,$$

$$B^1 = F^{(2)}_{h_2} I_{|h_2|\leqslant 1} * (\mu^2-\nu^2) - \left[\sum_{j=1}^{n} h^j_2 D^j F(Y)\right] I_{|h_2|\leqslant 1} * (\mu^2-\nu^2) +$$
$$+ \left[F^{(2)}_{h_2} - \sum_{j=1}^{n} h^j_2 D^j F(Y)\right] I_{|h_2|\leqslant 1} * \nu^2,$$

где первые два слагаемых в каждой из формул принадлежат $\mathcal{M}^{2,1}_{loc}$ и $\mathcal{M}^{2,2}_{loc}$ соответственно, а последние $-A_{loc}$.

2. Процессы C^2 и B^2 запишем в таком виде:

$$C^2 = F^{(1)}_{h_1} I_{|h_1|>1} * \mu^1 - \sum_{j=1}^{n} h^j_1 D^j F(Y_-) I_{|h_1|>1} * \mu^1,$$

$$B^2 = F^{(2)}_{h_2} I_{|h_2|>1} * \mu^2 - \sum_{j=1}^{n} h^j_2 D^j F(Y) I_{|h_2|>1} * \mu^2,$$

где оба слагаемые в каждой из формул принадлежат V.

3. Так как процессы

$$\sum_{S_k\leqslant t}\sum_{j=1}^{n} D^j F(Y_{S_k-})\Delta Y^j_{S_k}, \quad \sum_{S_k<t}\sum_{j=1}^{n} D^j F(Y_{S_k})\Delta^+ Y^j_{S_k},$$

$$\sum_{T_k<t}\sum_{j=1}^{n} D^j F(Y_{T_k})\Delta^+ Y^j_{T_k}$$

являются семимартингалами, то представим процессы C^3, B^3 и B^4 в виде

$$C^3 = F^{(1)}_{k^1+l^1} * p^1 - \sum_{j=1}^{n} [k^j_1 + l^j_1] D^j F(Y_-) * p^1,$$

$$B^3=F^{(2)}_{k^2+l^2}*p^2-\sum_{j=1}^{n}[k^j_2+l^j_2]D^jF(Y)_*p^2,$$

$$B^4=F^{(2)}_{\hat{k}+\hat{l}}*\eta-\sum_{j=1}^{n}[\hat{k}^j+\hat{l}^j]D^jF(Y)_*\eta,$$

где все слагаемые в правых частях являются семимартингалами. Подставляя теперь в [(6)] вместо сумм $\sum_{s\leq t}[\ ]$ и $\sum_{s<t}[\cdot]$ величины $\sum_{i=1}^{3}C_t^i$ и $\sum_{j=1}^{4}B_t^j$, соответственно, получим требуемую ф. з. п.

В заключение хочу выразить благодарность Л. И. Гальчуку за ценные замечания.

АрмНИИЭ *Поступила 21.12.1982*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гальчук Л. И.** О формуле замены переменных.—Матем. заметки, 1979, т. 26, вып. 4, с. 633—642.
2. **Doleans-Dade C. Meyer P. A.** Integrales stochastiques par rapport aux martingales: locales.—Sem. prob., Strasbourg, IV, Lecture. Notes in Math., № 124, Berlin Springer—Verlag, 1970.
3. **Гальчук Л. И.** Опциональные мартингалы.—Матем. сборник, 1980, 112(154), № 4 (8), с. 483—521.
4. **Мейер П. А.** Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
5. **Гальчук Л. И.** Стохастические интегралы по опциональным семимартингалам и случайным мерам.—Теория вероятности и ее применение. 1984, т. XXIX, № 1, с. 93—107.
6. **Dellacherie C., Meyer P. A.** Probabilites et potentiels, version refondue. Paris Hermann, 1976.
7. **Jacod J.** Multivariate point process: predictable projections, Radon-Nicodym derivatives, representation of martingales.—Z. Wahrcheinlichkeitstheorie Verw: Gebiete, 1975, v. 31, № 3, p. 235—253.
8. **Galtchouk. L. I.** On the predictable jumps of martingales, International sumposium on stochastic differential equations.—Abstracts of communications, Vilnius: 1978, p. 30—33.
9. **Jacod J.** Calcul stochastiqie et problems de martingales.—Lect. Notes in Math., № 714, Berlin: Springer-Verlag, 1979.
10. **Гальчук Л. И.** Обобщение теоремы Гирсанова о замене меры на случай полумартингалов со скачками.—Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, № 2, с. 279—294.
11. **Деллашери К.** Емкости и случайные процессы. М.: Мир, 1975.

Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎ ՕՊՑԻՈՆԱԼ ՍԵՄԻՄԱՐՏԻՆԳԱԼՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Օպցիոնալ սեմիմարտինգալների համար, որոնք տրված են ըստ մարտինգալների և պատահական չափերի ստոխաստիկ ինտեգրալներով, գտնված է փոփոխականի փոխարինման բանաձև, որի թռիչքային մասը ներկայացվում է տրված պատահական չափերի միջոցով։ Աշխատանքում չի ենթադրված, որ տեղի ունեն այսպես կոչված «սովորական» պայմանները, այսինքն σ*-հանրահաշիվների ոչ նվազող* $F=(F_t)$ *ընտանիքը լրացված է և աջից անընդհատ։*

Տվյալ հոդվածը ընդհանրացնում է Լ. Ի. Գալչուկի արդյունքը՝ ապացուցված «սովորական» ենթադրությունների դեպքում։