ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ռաֆայել Հրայրի Բարխուդարյան

Որոշ եզրային խնդիրների սեփական ֆունկցիաներով վերլուծության զուգամիտության արագացում

Ա.01.01 – "Մաթեմատիկական անալիզ" մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2007

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Бархударян Рафаел Грайрович

Ускорение сходимости разложений по собственным функциям некоторых граничных задач

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Математический анализ"

Ереван 2007

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Մաթեմատիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝	ՀՀ ԳԱԱ Ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսեսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ս. Գ. Սամկո
	ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ, ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Ա. Սահակյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2007թ. մայիսի 31–ին ժ. 15^{00}–ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ–ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2007թ. ապրիլի 30–ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ–մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Институте Математики Национальной Академии Наук Армении.

Научный руководитель:	Академик НАН РА А. Б. Нерсесян
Официальные оппоненты:	доктор физ–мат. наук, профессор С. Г. Самко
	член корреспондент НАН РА, доктор физ–мат. наук А. А. Саакян
Ведущая организация:	Государственный инженерный университет Армении

Защита диссертации состоится 31 мая 2007г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК-а 050 при Ереванском государственном университете (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 30–го апреля 2007г.

Ученый секретарь специализированного совета,
кандидат физ–мат. наук, доцент Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена ускорению сходимости функциональных рядов, а именно - ускорению сходимости разложений по собственным функциям некоторых граничных задач. Такие разложения часто используются как в теоретических дисциплинах, так и в прикладных задачах математики, физики и механики. Наиболее активные исследования в этой области относятся к рядам Фурье. Здесь основополагающие результаты получены А. Крыловым еще в 1905 г. [1], а после 1960 г. К. Ланцошем [2], К. Шоу [3] и другими (метод Крылова-Ланцоша). Но практически эффективные алгоритмы ускорения сходимости были разработаны за последние 20 лет, в основном, в работах Д. Экгофа [4], Д. Готтлиба [5] (метод KEG). А. Нерсесяном [6] в 2004 г. был реализован иной подход, обобщенный им в дальнейшем на случай регулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами (см. также [7, 8]) (QP-метод).

Цель работы.

1. Исследование метода приближенного нахождения значений скачков функции по ее коэффициентам Фурье. Получение точных асимптотических оценок для ошибок приближения методами KEG и QP.

2. Изучение разложений по собственным функциям краевой задачи для одного модельного дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом

3. Перенос существующих методов ускорения сходимости разложений по собственным функциям краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на случай краевой задачи для одномерной системы Дирака. Исследование асимптотического поведения ошибки метода.

Методы исследования. Применены методы теории функций, дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты работы имеют теоретический характер и позволяют охарактеризовать степень асимптотического ускорения сходимости изучаемых рядов. В ряде случаев получены точные оценки. Конструктивный характер этих результатов позволяет строить алгоритмы численной реализации. Разложения по собственным функциям системы Дирака имеют важное практическое значение и полученные результаты допускают непосредственное применение. В одном частном случае реализован соответствующий алгоритм и приведены численные результаты, подтверждающие теоретические оценки.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на семинаре отдела дифференциальных и интегральных уравнений Института Математики НАН Армении (руководитель А. Б. Нерсесян) а также на международных конференциях "Harmonic Analysis and Approximations – III" (Цахкадзор, Армения 2005), "Математическая Физика и Смежные Вопросы" , (Ереван, Армения 2006).

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях и одном тезисе, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 77 страницах, состоит из введения, двух глав, заключения и списка цитированной литературы, включающего 68 наименований.

Содержание работы

Во введении приведен исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации а также краткое описание содержания диссертации.

Содержание главы 1. Первая глава диссертации посвящена оценке ошибки при приближенном определении скачков в методах KEG и QP.

К. Экгоф в своих работах предложил метод для приближенного определения скачков, используя только коэффициенты Фурье. Именно основываясь на асимптотическом разложении коэффициентов Фурье функции f

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^q} \int_{-1}^{1} f^{(q)}(t) e^{-i\pi n t} dt,$$

приближенные значения $\widetilde{A}_k(f)$ можно найти, решая следующую систему уравнений при достаточно больших N

$$f_n = \sum_{k=0}^{q-1} \widetilde{A}_k(f) \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, \quad n = n_1, n_2, \ldots, n_q, \tag{1}$$

где $A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1)$, $\{n_k\}$ - различные целые числа, $|n_k| \leqslant N$, $n_k = O(N)$, $N >> 1$.

В работе [4] для этих скачков была дана (без доказательств) лишь асимптотическая оценка вида $\widetilde{A}_k = A_k + O(N^{k-q+1})$.

В данной работе получены не только точные оценки ошибок, но и выявлено асимптотическое поведение ошибки приближений методами KEG и QP в терминах скачков $\{A_k\}$ (см. [V]), в зависимости от индексов $\{n_k\}$ в системе (1). Кратностью элемента x в последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_m$ назовем число повторений x в этой последовательности.

Теорема 1.1 *Пусть $q \geqslant 1$ и индексы $n_s = n_s(N)$ выбраны так, что*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{n_s}{N} = c_s \neq 0, \; s = 1, \ldots, q, \tag{2}$$

и пусть α – наибольшая кратность элементов в последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_q$. Тогда, если $f \in C^{q+\alpha-1}[-1,1]$ и $f^{(q+\alpha-1)} \in AC[-1,1]$, то имеет место оценка

$$\widetilde{A}_j(f) = A_j(f) - A_q(f)\frac{\chi_j}{(i\pi N)^{q-j}} + o(N^{-q+j}), \quad N \to \infty, \quad j = 0, \ldots, q-1, \tag{3}$$

где константы χ_j суть коэффициенты полинома

$$\prod_{s=1}^{q}\left(x - \frac{1}{c_s}\right) = \sum_{s=0}^{q} \chi_s x^s.$$

Если в методе Крылова-Ланцоша вместо $\{A_k(f)\}$ использовать $\{\widetilde{A}_k(f)\}$ то соответствующую аппроксимацию обозначим через $\widetilde{S}_{q,N}$:

$$\widetilde{S}_{q,N}(f) = \sum_{n=-N}^{N}\left(f_n - \sum_{k=0}^{q-1}\widetilde{A}_k(f)B_{k,n}\right)e^{i\pi n x} + \sum_{k=0}^{q-1}\widetilde{A}_k(f)B_k(x), \tag{4}$$

где $B_k(x)$ – полиномы Бернулли а $B_{k,n}$ коэффициенты Фурье полиномов $B_k(x)$. Через $\widetilde{R}_{q,N}(f)$ обозначим ошибку приближения

$$\widetilde{R}_{q,N}(f) = f(x) - \widetilde{S}_{q,N}(f).$$

Во втором разделе главы 1 рассмотрено асимптотическое поведение аппроксимации (4) для различного выбора чисел $\{n_s\}$ в системе (1).

Теорема 1.5 *Пусть $q \geqslant 1$ и индексы $n_s = n_s(N)$ в (1) выбраны так, что*
$$\lim_{N\to\infty} \frac{n_s}{N} = c_s \neq 0,\ s = 1, \ldots, q,$$
и пусть α – наибольшая кратность элементов в последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_q$. Тогда, для $f \in C^{q+\alpha-1}[-1,1]$ и $f^{(q+\alpha-1)} \in AC[-1,1]$ имеет место следующая оценка:
$$\lim_{N\to\infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|\widetilde{R}_{q,N}(f)\| = |A_q(f)| d_2(q), \tag{5}$$
где
$$d_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^{q+1}} \left(\int_{-1}^{1} \prod_{s=1}^{q} \left(x - \frac{1}{c_s}\right)^2 dx \right)^{1/2}. \tag{6}$$
Пусть теперь если индексы $\{n_s\}$ удовлетворяют условию
$$\begin{aligned} -N \le n_s \le -N + c, \quad & s = 1, \ldots, m, \\ N - c \le n_s \le N, \quad & s = m+1, \ldots, q, \end{aligned} \tag{7}$$
где c – фиксированная константа. В этом случае получен явный вид константы d_2 в виде d_5
$$d_5(q) = \begin{cases} \dfrac{2^q\, q!}{\pi^{q+1}} \dfrac{1}{\sqrt{(2q+1)!}}, & q = 2m, \\ \dfrac{2^q\, q!}{\pi^{q+1}} \dfrac{\sqrt{q+1}}{\sqrt{q(2q+1)!}}, & q = 2m+1. \end{cases} \tag{8}$$
Показано, что такой выбор индексов $\{n_s\}$ в (7) оптимален в смысле L_2 - нормы.

Теорема 1.7 *Предположим, что $f \in C^{2q-1}[-1,1]$, $f^{(2q)} \in AC[-1,1]$ для фиксированного $q \ge 1$. Пусть выбор $n_s = n_s(N)$ удовлетворяет условиям*
$$\alpha N \le |n_s| \le N, \quad 0 < \alpha < 1, \quad s = 1, \ldots, q \tag{9}$$
Тогда верна следующая оценка:
$$||\widetilde{R}_{q,N}(f)|| = O(N^{-q-1/2}), \quad N \to \infty. \tag{10}$$
С другой стороны,
$$\liminf_{N\to\infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|\widetilde{R}_{q,N}(f)\| \ge |A_q(f)|\, d_5(q). \tag{11}$$

В третьем разделе главы 1, в ряде случаев, исследовано асимптотическое поведение метода QP с использованием приближенных значений $\{\widetilde{A}_k\}$ скачков. Соответствующую аппроксимацию обозначим через $\widetilde{S}_{m,q,N}$:

$$\widetilde{S}_{m,q,N}(f) = \widetilde{Q}(x) + \sum_{n=-N}^{N} \left(f_n - \widetilde{Q}_n\right) e^{i\pi nx},$$

ошибку приближения - через

$$\widetilde{R}_{m,q,N}(f) = f(x) - \widetilde{S}_{m,q,N}(f).$$

Теорема 1.8 *Пусть $q \geqslant 1$ и индексы $n_s = n_s(N)$ выбраны так, что*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{n_s}{N} = c_s \neq 0,\ s = 1, \ldots, q, \tag{12}$$

и пусть α – наибольшая кратность элементов в последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_q$ и $A_{q-2}(f) \neq 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{N\to\infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|\widetilde{R}_{1,q,N}(f)\| = h_2(q), \tag{13}$$

$$h_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^{q+1}} \left(\int_{-1}^{1} \left| A_q(f) \prod_{s=1}^{q} \left(x - \frac{1}{c_s}\right) - \frac{A_{q-1}(f)^2}{A_{q-2}(f)} x^q \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

2. Вторая глава диссертации посвящена разработке конструктивных методов ускорения разложений по собственным функциям некоторых граничных задач.

В первом разделе главы 2 рассмотрена модельная краевая задача с разрывным коэффициентом (см. [I, II]). Этот пример призван показать, что аналоги методов KEG и QP работают и в случае кусочно-гладких коэффициентов дифференциального оператора или (в зависимости от трактовки) в весовых пространствах с кусочно-гладким весом. Явный вид собственных функций позволил разработать простые методы ускорения сходимости разложений кусочно-гладких функций.

Второй раздел главы 2 занимает центральное место в диссертации. Здесь рассмотрена следующая краевая задача для одномерной системы Дирака (см. [II, IV]):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} + \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix} y = \lambda\, y, \tag{14}$$

$$y_1(-1)\sin\alpha + y_2(-1)\cos\alpha = 0, \tag{15}$$

$$y_1(1)\sin\beta + y_2(1)\cos\beta = 0, \tag{16}$$

где p_{ij} – вещественные функции, определенные и имеющие непрерывную производную на отрезке $[-1,1]$, $p_{12} = p_{21}$, $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $\alpha, \beta \in [0,\pi]$.

Система дифференциальных уравнений Дирака имеет важную теоретическую и прикладную ценность. В теоретической физике она часто фигурирует, когда надо разлагать заданную функцию по собственным функциям разных краевых задач. Свойства разложений по собственным функциям этой задачи исследованы рядом физиков и математиков. Проблемы такого рода представляют не только академический интерес, но и встречаются в таких приложениях, как квантовая механика, в теории R-матриц для частиц Дирака, при математическом моделировании одномерных магнитогидродинамических явлений [9]-[14].

Не умаляя общности, рассмотрим канонический вид уравнения Дирака

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} - \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} y = \lambda y, x \in [-1,1] \tag{17}$$

с краевыми условиями (15)-(16). Пусть $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ собственные значения, а $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ нормированные собственные вектор-функции этой задачи. Показано, что при обычном разложении по собственным функциям этой задачи,- если разлагаемая функция не принадлежит области определения соответствующего оператора,- наблюдается явление Гиббса. Введем обозначения

$$D_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n v_n(x), \quad c_n = \int\limits_{-1}^{1} v_n^T(x) f(x) dx, \tag{18}$$

$$DR_N(f) = f(x) - D_N(f),$$

$$Lf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{df}{dx} - \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} f,$$

$$Bf = B \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_k(x) = BL^k f(x), \quad k \geqslant 0.$$

Лемма 2.4 *Пусть $q \geqslant 1$ и $f \in C_2^q[-1,1]$. Тогда для коэффициентов c_n имеет место следующее представление:*

$$c_n = P_n + F_n, \tag{19}$$

где

$$P_n = v_n^T(1)\sum_{k=0}^{q-1}\lambda_n^{-k-1}\tilde{f}_k(1) - v_n^T(-1)\sum_{k=0}^{q-1}\lambda_n^{-k-1}\tilde{f}_k(-1) \tag{20}$$

$$F_n = \lambda_n^{-q}\int_{-1}^{1} v_n^T(x)L^q(f(x))dx. \tag{21}$$

Кроме этого

$$F_n = o(n^{-q}), \quad n \to \infty. \tag{22}$$

Используя эту Лемму, представим f в виде

$$f(x) = F(x) + P(x),$$

где $F(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F_n v_n(x)$, $P(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P_n v_n(x)$. Отсюда получим следующую формулу ускорения сходимости (метод KEG-D)

$$D_{q,N}(f) = D_N(F) + \sum_{k=0}^{q-1}\Big(G_k(x,1,0)\tilde{f}_k(1) - G_k(x,-1,0)\tilde{f}_k(-1)\Big), \tag{23}$$

где

$$G_k(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{k!}\frac{d^k G(x,\xi,\lambda)}{d\lambda^k}, \quad k \ge 0, \tag{24}$$

а $G(x,\xi,\lambda)$ – матрица-функция Грина.

Обозначим теперь $DR_{q,N}(f) = f(x) - D_{q,N}(f)$. Следующие результаты характеризуют асимптотическое ускорение сходимости при применении метода KEG-D.

Теорема 2.3 *Пусть* $q \geqslant 1$, $p, r \in C^{q-1}[-1,1]$, $p^{(q-1)}$, $r^{(q-1)} \in AC[-1,1]$, $f \in C_2^q[-1,1]$ *и* $f^{(q)} \in AC_2[-1,1]$. *Тогда*

$$DR_{q,N}(f) = o(N^{-q}), \quad N \to \infty \tag{25}$$

равномерно на $[-1,1]$.

Теорема 2.4 *Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} N^{q+1/2}\,\|DR_{q,N}(f)\|_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{q+1}\sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{2q+1}}, \tag{26}$$

где

$$C_1 = \tilde{f}_{q,1}(1)\cos\beta - \tilde{f}_{q,2}(1)\sin\beta,$$

$$C_2 = \tilde{f}_{q,2}(-1)\cos\alpha - \tilde{f}_{q,1}(-1)\sin\alpha.$$

Для дальнейшего ускорения сходимости разложения по собственным вектор функциям задачи Дирака заметим, что коэффициент P_n является, с точностью до множителя, отрезком степенного ряда относительно переменной $x = \lambda_n^{-1}$. Следовательно он может быть заменен аппроксимантом Паде. Для этого рассмотрим конечные последовательности комплексных чисел $\eta = \{\eta_k\}_{k=1}^m$, $\theta = \{\theta_k\}_{k=1}^m$ и введем обозначения

$$\Delta_n^0(\eta, A) = A_n(f), \tag{27}$$
$$\Delta_n^k(\eta, A) = \Delta_n^{k-1}(\eta, A) + \eta_k \Delta_{n-1}^{k-1}(\eta, A), \tag{28}$$

$$\Delta_n^0(\theta, B) = B_n(f), \tag{29}$$
$$\Delta_n^k(\theta, B) = \Delta_n^{k-1}(\theta, B) + \theta_k \Delta_{n-1}^{k-1}(\theta, B). \tag{30}$$

где $A_k = \tilde{f}_{k,1}(1)\cos\beta - \tilde{f}_{k,2}(1)\sin\beta$, $B_k = \tilde{f}_{k,1}(-1)\cos\alpha - \tilde{f}_{k,2}(-1)\sin\alpha$.

Лемма 2.7 *Пусть выполнены условия теоремы 2.3 и* $q-1 \geqslant m \geqslant 1$. *Тогда для коэффициентов* c_n, *определенных в* (18), *имеет место следующее представление:*

$$c_n = Q_n + H_n,$$

где

$$Q_n = \frac{v_{n,1}(1)}{\cos\beta} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\lambda_n^{m-k-1}\Delta_k^m(\eta, A)}{\prod_{s=1}^m (\lambda_n + \eta_s)} - \frac{v_{n,1}(-1)}{\cos\alpha} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\lambda_n^{m-k-1}\Delta_k^m(\theta, B)}{\prod_{s=1}^m (\lambda_n + \theta_s)}, \tag{31}$$

$$H_n = \frac{v_{n,1}(1)}{\cos\beta\,\lambda_n^{q+1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_n^k \eta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\eta, A)}{\prod_{s=1}^k (\lambda_n + \eta_s)} - \frac{v_{n,1}(-1)}{\cos\alpha\,\lambda_n^{q+1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_n^k \theta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\theta, B)}{\prod_{s=1}^k (\lambda_n + \theta_s)} + F_n,$$

$$F_n = \lambda_n^{-q} \int_{-1}^{1} v_n^T(x) L^q(f(x))dx.$$

Теперь для данной функции $f \in C_2^q[-1,1]$ имеем $f(x) = Q(x) + H(x)$, где

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n v_n(x), \quad H(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n v_n(x).$$

Получена следующая формула ускорения сходимости (метод QP-Д)

$$D_{m,q,N}(f) = Q(x) + \sum_{n=-N}^{N} H_n v_n(x). \tag{32}$$

$$DR_{m,q,N}(f) = f(x) - D_{m,q,N}.$$

Последовательности η и θ определим из систем

$$\Delta_k^m(\eta, A) = 0, \qquad k = q-m, .., q-1, \tag{33}$$

$$\Delta_k^m(\theta, B) = 0, \qquad k = q-m, .., q-1. \tag{34}$$

Следующий результат является аналогом теоремы 3.1 работы [7].

Теорема 2.6 *Пусть выполнены условия теоремы 2.3,* $q-1 \geqslant m \geqslant 1$ *и последовательности* θ, η *удовлетворяет равенствам* (33) *и* (34). *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} N^{q+1/2} \left\| DR_{m,q,N}(f) \right\|_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{q+1} \sqrt{\frac{C_3^2 + C_4^2}{2q+1}}, \tag{35}$$

где

$$C_3 = \frac{\det U_{q-m}^{m+1}}{\det U_{q-m-1}^m}, \quad C_4 = \frac{\det V_{q-m}^{m+1}}{\det V_{q-m-1}^m},$$

$$U_r^m = (A_{k-s+r})_{k,s=1}^m, \quad V_r^m = (B_{k-s+r})_{k,s=1}^m.$$

Литература

[1] *Крылов А.* О приближенных вычислениях. — Лекции читанные в 1906 г. СПб. Типолитогр. К. Биркенфельда, 1907.

[2] *Lanczos C.* Discourse on Fourier Series. — Oliver and Boyd, Edinburgh, 1966.

[3] *Shaw J., Johnson L., Riess R.* Accelerating convergence of eigenfunction expansions // *Math. Comp.* — 1976. — Vol. 30, no. 3. — Pp. 769–477.

[4] *Eckhoff K. S.* Accurate and efficient reconstruction of discontinuous functions from truncated series expansions // *Math. Comp.* — 1993. — Vol. 61. — Pp. 745–763.

[5] *Gottlieb D.* Spectral methods for compressible flow problems // Ninth international conference on numerical methods in fluid dynamics (Saclay, 1984). — Berlin: Springer, 1985. — Vol. 218 of *Lecture Notes in Phys.* — Pp. 48–61.

[6] *Нерсесян А.* Квазиполиномы типа бернулли и ускорение сходимости рядов фурье кусочно-гладких функций // *Доклады НАН Армении.* — 2004. — Т. 104, № 4. — С. 186–191.

[7] *Nersessian A., Poghosyan A.* Accelerating the convergence of trigonometric series // *Cent. Eur. J. Math.* — 2006. — Vol. 4, no. 3. — Pp. 435–448.

[8] *Нерсесян А.* Ускоренная сходимость разложений по собственным функциям одномерных граничных задач // *Математика в высшей школе, научно методичный сборник.* — 2005. — Т. 2. — С. 47–63.

[9] *Szmytkowski R.* Discontinuities in Dirac eigenfunction expansions // *J. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 42, no. 9. — Pp. 4606–4617.

[10] *Szmytkowski R., Hinze J.* Kapur-Peierls and Wigner R-matrix theories for the Dirac equation // *J. Phys. A.* — 1996. — Vol. 29, no. 18. — Pp. 6125–6141.

[11] *Alicki R.* Dirac equations for MHD waves: Hamiltonian spectra and supersymmetry // *J. Phys. A.* — 1992. — no. 25. — Pp. 6075–6085.

[12] *Chang J.* The R-matrix theory of electron-atom scattering using the Dirac Hamiltonian // *J. Phys. B: Atom. Molec. Phys.* — 1975. — Vol. 8, no. 14. — Pp. 2327–2335.

[13] *Gadella M., Gómez F.* On the Mathematical Basis of the Dirac Formulation of Quantum Mechanics // *International Journal of Theoretical Physics.* — 2003. — Vol. 42, no. 10. — Pp. 2225–2254.

[14] *Goertzel G.* Resonance reaction involving Dirac-type incident particles // *Phys. Rev.* — 1948. — Vol. 73, no. 12. — Pp. 1463–1466.

Заключение

Резюмируя сказанное, можно отметить, что в диссертационной работе получены следующие результаты:

- В первой главе диссертации дополняются некоторые результаты ранее известных работ, связанных с ускорением сходимости классического ряда Фурье. В частности, получены точные асимптотические оценки KEG и QP - методов, изучена зависимость ошибки приближенного определения скачков от выбора индексов $\{n_s\}$ в системе (1).

- Рассмотрена модельная граничная задача

$$i\frac{du}{dx} = \lambda\,\varepsilon(x)u(x), \quad u(-1) = u(1). \tag{36}$$

  с разрывным коэффициентом (весом) $\varepsilon(x)$. Для разложения по собственным функциям этой задачи построены алгоритмы ускорения сходимости.

- Рассмотрена граничная задача для одномерной системы Дирака,

$$y_2'(x) - (\lambda + p(x))y_1(x) = 0, \quad y_1'(x) + (\lambda + r(x))y_2(x) = 0, \tag{37}$$

$$y_2(-1)\cos\alpha + y_1(-1)\sin\alpha = 0, \tag{38}$$

$$y_2(1)\cos\beta + y_1(1)\sin\beta = 0. \tag{39}$$

  Для функции из класса $f \in C_2^1[-1,1]$ показано, что существует явление подобное явлению Гиббса для классического ряда Фурье.

  Результаты, относящиеся к системе Дирака, позволяют в полном объеме решить задачу ускорения сходимости рассмотренных разложений Фурье-Дирака, для гладких на отрезке $[-1,1]$ функции включая как теоретические оценки сходимости, так и конструктивное обоснование алгоритмов реализации методов KEG-D и QP-D. Аналогично случаю рядов Фурье, из представления функции Грина следует, что метод QP-D позволяет выявлять скрытые осцилляционные свойства компонентов разлагаемой функции.

- Практическая эффективность разработанных алгоритмов подтверждается численными экспериментами, проведенными применением системы MATHEMATICA. Два примера этих экспериментов, приведенные в работе, подтверждают это в случае явных видов собственных функций и собственных значений.

Работы автора по теме диссертации

[I] *Нерсесян А., Бархударян Р.* Ускорение сходимости разложения по собственным функциям одной модельной краевой задачи с разрывным коэффициентом // *Доклады НАН Армении.* — 2006. — Т. 106, № 1. — С. 5–12.

[II] *Nersessian A., Poghosyan A., Barkhudaryan R.* Accelerating convergence of Fourier series // *Journal of Contemporary Math. Anal.* — 2006. — Vol. 41, no. 2. — Pp. 42–55.

[II] *Бархударян Р.* Ускорение сходимости разложений по собственным функциям системы Дирака // *Математика в высшей школе.* — 2006. — Т. 2, № 3. — С. 54–62.

[IV] *Бархударян Р.* Обобщения полиномиального метода для разложений по собственным функциям системы Дирака // Тезисы докладов "Математическая Физика и Смежные Вопросы", Российско–Армянское рабочее совещание. — 2006. — С. 23.

[V] *Бархударян Р. Г., Погосян А. В.* О сходимости одного квазиполиномиального приближения // *Доклады НАН Армении.* — 2007. — Т. 107, № 1. — С. 13–19.

Ամփոփագիր

Ամփոփելով ասվածը՝ կարելի է նշել, որ ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

- Ատենախոսության առաջին գլխում լրացվում են նախկինում հայտնի որոշ արդյունքներ կապված Ֆուրիեի դասական շարքերի զուգամիտության արագացման հետ: Ուսումնասիրվել է թռիչքների մոտավոր հաշվման սխալը (1) համակարգում կախված $\{n_s\}$ նշիչների ընտրությունից: Ստացվել են նաև KEG և QP մեթոդների ճշգրիտ ասիմպտոտիկ գնահատականներ:

- Ուսումնասիրված է մոդելային եզրային խնդիր

$$i\frac{du}{dx} = \lambda\,\varepsilon(x)u(x), \quad u(-1) = u(1), \tag{40}$$

խզվող գործակցով (կշռով) $\varepsilon(x)$: Այս խնդրի սեփական ֆունկցիաներով վերլուծության համար կառուցվել են նրա զուգամիտության արագացման մեթոդներ:

- Դիտարկված է մի չափանի Դիրակի համակարգը,

$$y_2'(x) - (\lambda + p(x))y_1(x) = 0, \quad y_1'(x) + (\lambda + r(x))y_2(x) = 0, \tag{41}$$

$$y_2(-1)\cos\alpha + y_1(-1)\sin\alpha = 0, \tag{42}$$

$$y_2(1)\cos\beta + y_1(1)\sin\beta = 0. \tag{43}$$

Ցույց է տրված, որ $f \in C_2^1[-1,1]$ ֆունկցիաների համար տեղի ունի Գիբսի երևույթի տիպի երևույթ:

Դիրակի համակարգին առընչվող արդյուքները հնարավորություն են ստեղծում ամբողջությամբ լուծել սեփական ֆունկցիաներով վերլուծության զուգամիտության արագացման խնդիրը $[-1,1]$ հատվածի վրա ողորկ ֆունկցիաների համար՝ ներառելով ինչպես զուգամիտության տեսական գնահատականներ, այնպես նաև $KEG-D$ և $QP-D$ ալգորիթմների կոնստրուկտիվ հիմնավորում: Օգտագործելով Գրինի ֆունկցիայի ներկայացումը՝ Ֆուրիեի շարքերի դեպքին համանման, $QP-D$ ալգորիթմը հնարավորություն է տալիս նաև գտնել թաքնված տատանումները:

- Մշակված մեթոդների փաստացի էֆեկտիվությունը հիմնավորվում է ատենախոսությունում ներկայացված թվային փորձերի արդյունքում, որոնք կատարվել են MATHEMATICA ծրագրային փաթեթի օգնությամբ: