ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ **2, 1976** **Естественные науки**

Математика

С. М. МАНУКЯН

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН ВБЛИЗИ КАУСТИКИ

Рассматривается задача определения параметров движения сплошной среды при наличии распространяющихся периодических слабых ударных волн в окрестности каустики, представляющей огибающую лучей соответствующей линейной задачи. Определяется линейное решение для периодической задачи через функцию Эйри, далее — форма ударной волны вдали от каустики. Ударная волна получается после опрокидывания непрерывного профиля методом замены характеристических переменных в нелинейном решении. Взяв это решение на падающей волне в качестве начального условия, а впереди ударной волны выбрав частное решение нелинейных уравнений, сращиваемое с линейным, методом характеристик мы рассчитали падающую ударную волну. В малой окрестности пораболитической линии полученное решение не является точным, здесь надо решать трансзвуковую задачу.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для задачи газовой динамики нелинейные уравнения вблизи каустики для нестационарного случая были выведены в [1—3]. А для случая магнитной газодинамики произвольной среды как в плоской, так и в пространственной задаче уравнения, описывающие окрестность каустики, получены в [4, 5]. Легко видеть, что указанные нелинейные уравнения, описывающие окрестность каустики, можно применить и к периодическим ударным волнам. Под фронтами волн линейной задачи следует понимать поверхности постоянной фазы, на которых решение максимально. Для каждой такой волны, отстающей от соседней на некотором расстоянии, введем систему координат $x_1 y_1$ [5], связанную с каустикой.

Отметим, что уравнения [5], записанные в простом виде через радиусы кривизны луча и каустики, выведены для плоской задачи. В случае пространственной задачи для произвольной среды не удается получить подобной конкретизации коэффициентов и приходится пользоваться уравнениями [4]. Можно показать, что уравнения [4] годятся для произвольной среды, в которой параметры невозмущенного движения зависят не только от координат, но и от времени.

Если в задаче газовой динамики неоднородной первоначально движущейся среды записать уравнения среды в системе координат, движущейся со скоростью частицы невозмущенного движения в точке А касания фиксированного луча с каустикой и далее ввести координаты x_1, y_1 по нормали к волне и к каустике, то можно показать, что движение в окрестности каустики будет снова двумерным и будет описываться уравнениями [5]. Здесь под κ_2 подразумевается проекция вектора нормальной кривизны луча на нормаль к каустике. Во всех уравнениях указанных работ можно ввести вместо x_1, y_1 новые переменные x, y [5], в которых коэффициенты уравнений равны единице. Тогда нелинейные уравнения в окрестности каустики принимают вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}(V_x+y)+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial y}=\frac{\partial V_y}{\partial x}. \tag{1}$$

В линейной задаче, вводя потенциал φ_0 по формулам $V_x=\frac{\partial\varphi_0}{\partial_x}$, $V_y=\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}$, из (1) получим

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}.y+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

Легко видеть, что решением уравнения (2), периодическим по переменной x, линейно связанной со временем, будет

$$\varphi_0=\mathrm{Re}\{B(\omega)e^{i\omega x}v(\omega^{2/3}y)\}. \tag{3}$$

Здесь v(z) есть функция Эйри, а постоянная $B(\omega)$ может быть выбрана из соответствующей формы решения эталонных волн [6, 7]

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\omega^{1/6}}{(-i\omega)^{k+1}}.e^{-i\frac{\pi}{4}}. \tag{4}$$

Из асимптотического представления функции Эйри [3] можно для больших y, т. е. вдали от каустики, из (3) и (4) получить

$$\varphi_{\text{геом}}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi(-i\omega)^{k+1}}(-y)^{-\frac{1}{4}}\left[e^{i\omega(x-\alpha)}+e^{i\omega(x+\alpha)-i\frac{\pi}{2}}\right]\right\}. \tag{5}$$

Здесь $\alpha=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$. $x=\pm\alpha$ соответствуют падающей AB и отраженной AC от каустики волнам. Вдали от каустики для слагаемого, соответствующего волне AB, из (5) получится

$$\varphi^1=\frac{1}{2\pi}(-y)^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{\omega^{k+1}}\cos\left[\frac{\pi}{2}(k+1)+\omega(x-\alpha)\right]. \tag{6}$$

Заметим, что уравнения (1) получены для значения $k=0$. Это соответствует скачкообразной волне AB в нестационарной задаче, решение для которой получится из (3)—(6) применением обратного преобразования Лапласа по $S=-i\omega$.

Можно показать, что эти уравнения верны также для $k+1<\frac{5}{6}$, а в случае $k+1\geqslant\frac{5}{6}$ нелинейные члены значительно меньше линейных, и тогда вместо (1) нужно пользоваться уравнением (2), а решение (3)—(6) будет правильно описывать значение параметров в окрестности каустики.

Далее, рассматривается значение $k=0$, при котором линейное решение (3)—(6) вблизи каустики не является точным, т. е. не удовлетворяет уравнениям (1), и ищется решение нелинейных уравнений (1), удовлетворяющее условиям на ударных волнах AB и AC и переходящее вдали от каустики в (3)—(6).

Заменой переменных $V_{x_1}=y+V_x$, $V_{y_1}=x+V_y+C_{2,4}$, где $C_{2,4}=\text{const}$, можем найти частное решение уравнений (1), линеаризируя их путем перехода к независимым переменным V_{x_1}, V_{y_1}.

Тогда (1) примет вид

$$V_{x_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial V_{y_1}^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial V_{x_1}^2}=0,\quad x=\frac{\partial\Phi}{\partial V_{x_1}},\quad y=\frac{\partial\Phi}{\partial V_{y_1}},\tag{7}$$

где $\Phi=-\varphi-xy-C_{2,4}y+xV_{x_1}+yV_{y_1}$, причем φ есть потенциал нелинейной задачи

$$V_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad V_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Решение (7) можно взять в виде

$$\Phi=-\varphi_0(V_{y_1},V_{x_1})+V_{x_1}.V_{y_1}+C_{1,3}.V_{x_1}+C,\tag{8}$$

где $C, C_1, C_3=\text{const}$, $\varphi_0(x,y)$ есть значение потенциала линейной задачи, т. е. дается (3)—(6).

В дальнейшем решение (8) используется для построения нелинейного решения в окрестности ударной волны AB, причем постоянные C_1, C_2 берутся позади волны, а C_3, C_4 — впереди нее. Можно показать, что значение φ, найденное с помощью (8) вдали от каустики, где $|y|\gg|V_x|$, $|x|\gg|V_y|$, переходит в $\varphi_0(x,y)$.

В работе [5] определяется решение уравнений (1) для нестационарной задачи в окрестности падающей ударной волны AB методом характеристик. Впереди AB решение задается в виде (8), а позади AB—рассчитывается указанным методом с точным удовлетворением условий на AB.

В работе [6] кратко говорится о результате численного расчета нестационарной задачи в целом, т. е. путем решения «трансзвукового» уравнения (1) с граничными условиями, взятыми из линейного решения и заданными на некотором незамкнутом контуре. Следует отметить, что для периодической во времени задачи расстояние между последовательными падающими ударными волнами значительно меньше, чем размеры указанного контура. Постановка «трансзвуковой» задачи для двух ударных волн AB и AC может быть дана лишь формально— игнорированием остальных разрывов.

§ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Определим теперь нелинейное решение для периодической во времени задачи в окрестности ударной волны AB методом [7]. Для этого нужно иметь решение на начальном участке AB вдали от каустики. Быстро меняющаяся часть линейного решения вблизи AB определяется при помощи (6) в виде

$$V_x=-\frac{1}{2\pi}(-y)^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{\omega^k}\cos\left[\frac{\pi}{2}k+\omega(x-\alpha)\right].\tag{9}$$

Профиль решения (9), как показывается в нелинейной теории [8], на некотором расстоянии (напр., для некоторых x и y) опрокидывается, и образуется периодическая ударная волна. Мы предполагаем, что в рассматриваемой области ударная волна образовалась при $h \leq -y$, и определяем ее амплитуду методом замены в линейном решении (9) переменной $x-\alpha$ через $\beta_{1,2}$. Здесь $\beta_{1,2}=\mathrm{const}$ дает уравнение нелинейных характеристик впереди и позади AB. При этом удобно использовать характеристики уравнения (1)

$$\frac{dx}{dy}=\mp\sqrt{-y\cdot V_x}, \tag{10}$$

где верхний знак дает характеристики того же наклона, что и AB, а нижний знак — характеристики того же наклона, что и AC. Для характеристик первого семейства вдали от каустики из (10) можно получить

$$\frac{dx}{dy}=-(-y)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{V_x}{(-y)^{1/2}}. \tag{11}$$

Заменим в (9) $x-\alpha$ через $\beta_{1,2}$, подставим V_x в (11) и проинтегрируем (11) в виде

$$x=\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\pi\omega^k}\cos\left(\frac{\pi}{2}k+\omega\beta_{1,2}\right)\left[(-y)^{\frac{1}{4}}-h^{\frac{1}{4}}\right]+\beta_{1,2}. \tag{12}$$

При $-y=h$ (12) непрерывно переходит в линейное уравнение $x-\alpha=\beta_1=\beta_2$. Вдоль (12) имеет место следующее соотношение:

$$V_x=-\frac{1}{2\pi}(-y)^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{\omega^k}\cos\left(\frac{\pi}{2}k+\omega\beta_{1,2}\right). \tag{13}$$

Вдоль ударной волны AB $\frac{dx}{dy}=-\sqrt{-y-\frac{V_x+V_x^0}{2}}$, где индекс o дает значение параметров впереди ударной волны. Вдали от каустики получится

$$\frac{dx}{dy}=-(-y)^{1/2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{V_x+V_x^0}{(-y)^{1/2}}. \tag{14}$$

Приравнивая значение x из (12) впереди и позади AB и подставляя одно из них в (14), можем показать, что, как и в [7], имеет место закон равенства площадей под кривой $F(\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}k+\omega\beta\right)$ и под секущей, проходящей через точки β_1, β_2:

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}F(\beta)\,d\beta=\frac{F(\beta_1)+F(\beta_2)}{2}(\beta_2+\beta_1).$$

Окончательно на AB можно получить

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{\omega(\beta_2-\beta_1)}{2}=\dfrac{\omega}{2}(\beta_2-\beta_1)\\[2mm] \cos\left(\dfrac{\pi}{2}k+\omega\beta_2\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k+\omega\beta_1\right)=\dfrac{\beta_2-\beta_1}{r(y)}\pi\omega^k,\end{cases} \tag{15}$$

где $r(y)=(-y)^{1/4}-h^{1/4}$.

Обозначим $\omega\beta=z$, $z_1-z_2=\kappa$, тогда, выбирая $\frac{k}{2}>\pi$, можем из (15) получить $\kappa=8{,}9868$,

$$z_1=\frac{k}{2}+\arcsin\left(\frac{k\pi}{2r(y)\,\omega\sin\frac{k}{2}}\right).$$

Чтобы получить более точное значение решения, следует к (13) прибавить медленно меняющуюся вблизи AB часть решения (5) и окончательно записать вблизи AB, вдали от каустики

$$V_x=-\frac{1}{2\pi}(-y)^{-1/4}[\cos z_2+\sin(z_2+2\omega\alpha)],$$

$$V_y=\frac{1}{8\pi}(-y)^{-5/4}\frac{1}{\omega}[-\sin z_2+\cos(z_2+2\omega\alpha)]-\frac{1}{2\pi}(-y)^{1/4}[\cos z_2-$$
$$-\sin(z_2+2\omega\alpha)]. \tag{16}$$

Формулы (16) дают решение позади AB, а значения V_x^0, V_y^0, т. е. впереди AB, получатся заменой в (16) z_2 на z_1. Далее предположено, что решение (8) имеет место вдали от каустики как впереди, так и позади AB.

Счет ведется от точки $y=-100$, ω выбирается равным единице. Значение x, V_{x_1}, $V_{x_1}^0$ в начальной точке определяется из следующих соотношений:

$$x=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}+\frac{1}{\pi}\cos z_1 r(y)+\frac{z_1}{\omega},$$

$$V_{x_1}=V_x+y,\quad V_{x_1}^0=V_x^0+y.$$

Значение V_{y_1}, $V_{y_1}^0$ выбирается так, чтобы

$$V_{y_1}-\frac{2}{3}(-V_{x_1})^{3/2}=\beta_2,\quad V_{y_1}^0-\frac{2}{3}(-V_{x_1}^0)^{3/2}=\beta_1.$$

Записывая
$$V_{y_1}=V_y+x+C_2,\quad V_{y_1}^0=V_y^0+x+C_4 \tag{17}$$

и условие на ударной волне [5]

$$V_y-V_y^0=(V_x-V_x^0)\sqrt{-\frac{V_{x_1}+V_{x_1}^0}{2}},$$ можем получить

$$C_2-C_4=V_{y_1}-V_{y_1}^0-(V_{x_1}-V_{x_1}^0)\sqrt{-\frac{V_{x_1}+V_{x_1}^0}{2}}.$$

Тогда, зная C_2 из (17), определим значение C_4.

Таким образом, в начальной точке получаются следующие значения параметров движения:

$x=668{,}2441$; $y=-100$; $V_{x_1}^0=-100{,}0809$;
$V_{y_1}^0=673{,}2716$; $V_{x_1}=-99{,}9020$; $V_{y_1}=662{,}4956$;
$C_2=-5{,}7738$; $C_4=6{,}7914$.

Учитывая соотношения

$$V_x=\frac{\partial\varphi_0}{\partial V_{y_1}},$$

$$V_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial V_{x_1}} - (C_{1,3} + C_{2,4}),$$

которые получаются из (7), (8) и предполагая, что решение (8) имеет место всюду впереди AB, можно получить

$$V_x^0 = -\frac{1}{\pi}\,\omega^{1/6}\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \omega V_{y_1}^0\right) v(\omega^{2/3} V_{x_1}^0),$$

$$V_y^0 = \frac{1}{\pi}\,\omega^{-1/6}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \omega V_{y_1}^0\right) v'(\omega^{2/3} V_{x_1}^0). \qquad (18)$$

Следует отметить, что вблизи начальной точки для расчета течения приходится значения V_x, V_y на начальной характеристике вычислять по формулам (18) и позади волны AB. Далее также, как и в [5], производится расчет течения позади AB с удовлетворением условий на ней с помощью метода характеристик (10). Начиная со значения $y = -100$ и кончая $y = -9$, значения функции Эйри и ее производной берутся по асимптотическим формулам, а с точки $y = -9$ — по табличным данным [9] с соответствующей интерполяцией. Результаты расчетов приведены в табл. 1, из которой виден колеблющийся характер решения на AB при наличии увеличения амплитуды решения с уменьшением $|y|$., причем AB есть ударная волна сжатия. Недостатком полученного решения, как и в [5], является отсутствие затухания решения на AB при $V_{x_1} = 0$, т. е. в этой точке все еще $V_{x_1}^0 < 0$, что невозможно объяснить, не вводя в этом месте особой точки. Однако сопоставление результатов расчетов в [5] и картины расположения ударной волны и параболической линии в [6] показало, что более точный расчет [6] «трансзвуковой» нестационарной задачи приводит к наличию параболической линии $V_{x_1} = V_{x_1}^0 = 0$ по обе стороны AB, что заставляет предположить наличие затухания AB.

По-видимому, отсутствие затухания AB при $V_{x_1} = 0$ в данной периодической по времени задаче связано, как и в [5], с предположением о том, что решение (8) имеет место впереди AB вплоть до параболической линии. Задавая на некоторой прямой $x_1 = \mathrm{const} > 0$ значение решения (8), можем показать, что впереди AB решение будет снова даваться (8), но лишь до характеристики семейства AC, исходящей из точки пересечения $x_1 = \mathrm{const}$ с параболической линией и пересекающей AB. Ниже этой характеристики задачу нужно решать как «трансзвуковую», т. е. с учетом значений параметров, взятых из линейного решения в области элиптичности уравнения.

Автор статьи выражает глубокую благодарность А. Г. Багдоеву за постановку задач и за ценные советы в ходе их решения.

Таблица 1

x	y	$V^0_{x_1}$	$V^0_{y_1}$	V_{x_1}	V_{y_1}	V^0_x	V^0_y	V_x	V_y	ξ^0
656,7469	—98,9587	—99,0580	663,5233	—98,8254	653,2731	—0,0993	—0,0150	0,1333	2,3001	—0,004757
569,3633	—89,9637	—90,0557	576,0471	—89,8151	565,7639	—0,0920	—0,1075	0,1486	2,1745	—0,0055
468,2286	—78,9525	—79,0521	474,9617	—78,8006	464,6312	—0,0996	—0,0583	0,1518	2,1764	—0,0068
366,2360	—67,0038	—67,0467	372,4875	—66,7813	362,0940	—0,0429	—0,5398	0,2225	1,6319	—0,0089
279,7112	—55,9578	—56,0395	286,2920	—55,7591	275,8239	—0,0817	—0,2105	0,1986	1,8865	—0,0118
175,9045	—41,0214	—41,0230	182,0347	—40,7178	171,4220	—0,0016	—0,6611	0,3036	1,2913	—0,0196
104,3675	—28,8869	—28,9954	111,2999	—28,6681	100,4934	—0,1084	—0,1409	0,2188	1,8996	—0,0346
74,3191	—22,9672	—22,9713	80,8660	—22,6331	69,9173	—0,0041	—0,2445	0,3341	1,3720	—0,0509
22,2023	—9,9651	—9,8788	28,9292	—9,4983	17,5515	0,0863	—0,0645	0,4668	1,1230	—0,1988
20,3416	—9,3580	—9,3726	27,3974	—8,9888	15,9954	—0,0145	—0,2644	0,3692	1,4277	—0,2161
19,1188	—8,9501	—8,8677	25,9024	—8,4787	14,4831	—0,0824	—0,0077	0,4714	1,1382	—0,2357
16,7036	—8,1105	—8,1582	23,8879	—7,7639	12,4355	—0,0477	0,3929	0,3466	1,5057	—0,2689
16,1167	—7,9008	—7,8558	23,0460	—7,4568	11,5852	0,0450	0,1379	0,4441	1,2423	—0,2850
14,0667	—7,1383	—7,1463	21,1550	—6,7393	9,6626	—0,0080	0,2970	0,3990	1,3698	—0,3305
12,1267	—6,3771	—6,2360	18,8543	—5,8125	7,3290	0,1411	—0,0637	0,5546	0,9761	—0,4080
10,0847	—5,5222	—5,5232	17,1887	—5,0890	5,6243	—0,0010	—0,3127	0,4332	1,3134	—0,4931
5,8973	—3,4647	—3,2810	12,6728	—2,7717	0,9944	0,1836	—0,0159	0,6930	0,8709	—1,0992
4,0978	—2,3439	—2,3455	11,2252	—1,7863	—0,5352	—0,0015	0,3360	0,5576	1,1408	—1,8437
2,8666	—1,2128	—0,9545	9,6678	—0,0504	—2,2500	0,2583	0,0099	1,1623	0,6573	—7,2758

Кафедра мат. обеспечения ЭВМ

Поступила 26.05.1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Guirand J. P.**, Comptes Rendus, 266, №6, 1965.
2. **Багдоев А. Г.**, Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости, Ереван, 1967.
3. **Багдоев А. Г.**, Изв. АН Арм. ССР, Механика, XXII, № 1, 1969.
4. **Багдоев А. Г.**, ДАН АН Арм. ССР, LIII, № 1, 1971.
5. **Манукян С. М.**, Ученые записки ЕГУ, № 3, 1974.
6. **Мёрман Э., Крупп Дж.**, Сб. докладов «Численные методы в механике жидкостей», М., 1973.
7. **Лайтхилл М. Дж.**, Общая теория аэродинамики больших скоростей, ИЛ, М., 1962.
8. **Солуян С. И., Хохлов Р. В.**, Вестник МГУ, сер. физ., № 3, 52, 1961.
9. **Фок В. А.**, Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн, М., 1970.

Ս. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ԿԱՈՒՍՏԻԿԱՅԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է հոծ միջավայրի շարժման պարամետրերի որոշման խնդիրը, երբ համապատասխան գծային խնդրի ալիքների պարուրիչը հանդիսացող կաուստիկայի շրջակայքում գոյություն ունի պարբերական թույլ ալիքների տարածումը։ Որոշվում է պարբերական խնդրի գծային լուծումը էրիի ֆունկցիայի միջոցով։ Այնուհետև որոշվում է հարվածային ալիքի ձևը կաուստիկայից բավական մեծ հեռավորության վրա։ Հարվածային ալիքը ստացվում է գծային լուծման մեջ եղած խարակտերիստիկական փոփոխականները փոխարինելու միջոցով, երբ որոշվում է ալիքի անընդհատ պրոֆիլը։ Վերցնելով այդ լուծումը ընկնող ալիքի վրա որպես սկզբնական պայման, իսկ հարվածային ալիքի առջևում ընտրելով ոչ գծային հավասարումների այն մասնավոր լուծումը, որը հեռվում համընկնում է գծային լուծման հետ, հաջողվում է խարակտերիստիկաների եղանակով հաշվել ընկնող հարվածային ալիքը։ Պարաբոլական գծի մոտիկ շրջակայքում ստացված լուծումը ճշգրիտ չէ և անհրաժեշտ է այդ մասում լուծել տրանսձայնային խնդիր։