ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,2000 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

Ю.М. МОВСИСЯН, И.Р. СИМОНЯН

СВЕРХТОЖДЕСТВА ЛЕВОЙ И ПРАВОЙ ДИСТРИБУТИВНОСТЕЙ В МНОГООБРАЗИЯХ ПОЛУГРУПП

Некоторое равенство в многообразии полугрупп называется сверхтождеством, если при подстановке в функциональные символы этого равенства любого терма данного многообразия мы получим тождества. Соответственно, некоторое равенство в многообразии полугрупп называется предсверхтождеством, если при подстановке в функциональные символы этого равенства любого терма данного многообразия, исключая термы проекции, мы получим тождества. В этой работе были найдены критерии выполнимости сверхтождеств и предсверхтождеств левой и правой дистрибутивностей различных рангов.

Основные понятия. Введем некоторые основные понятия, используемые в этой работе [1–2].

Равенство $t=t'$, где t, t' – термы некоторого типа τ, называется сверхтождеством в произвольной алгебре A, если при подстановке любого терма этой алгебры мы получаем тождества.

Равенство $t=t'$, где t, t' – термы некоторого типа τ, называется предсверхтождеством в произвольной алгебре A, если при подстановке любого терма этой алгебры, за исключением термов проекции, мы получаем тождества.

Равенство $t=t'$, где t, t' – термы некоторого типа τ, является сверхтождеством (предсверхтождеством) в некотором многообразии полугрупп, если оно – сверхтождество (предсверхтождество) в каждой полугруппе этого многообразия.

Символы равенства $t=t'$ называются функциональными переменными, а их количество называется рангом равенства.

Очевидно, что каждое сверхтождество также является предсверхтождеством. Обратное в общем случае неверно.

Два сверхтождества (предсверхтождества) называются эквивалентными в многообразии полугрупп, если в каждой полугруппе этого многообразия либо оба эти сверхтождества (предсверхтождества) выполняются, либо ни одно из них не выполняется. Полугруппа называется:

(i) медиальной, если в ней выполняется тождество $xyzu = xzyu$;

(ii) коммутативной, если в ней выполняется тождество $xy = yx$;

(iii) идемпотентной, если в ней выполняется тождество $x = x^2$.

1. Сверхтождества левой и правой дистрибутивностей ранга 1 в многообразии полугрупп. Рассмотрим сверхтождества левой и правой дистрибутивностей ранга 1:

$$d_1^0 \quad F(x, F(y,z)) = F(F(x,y), F(x,z));$$

$$d_2^0 \quad F(F(x,y), z) = F(F(x,z), F(y,z)).$$

Выясним, при каких условиях сверхтождества d_1^0 и d_2^0 выполняются в многообразиях полугрупп.

Теорема 1. Для того чтобы в многообразии полугрупп V выполнялось сверхтождество d_1^0 [d_2^0], необходимо и достаточно, чтобы в V выполнялись тождества $x^2 = x^3$, $xyz = xyxz$, $xyz = xzyz$.

Следствие 1. В произвольном многообразии полугрупп сверхтождества d_1^0 и d_2^0 эквивалентны.

Следствие 2. (i) В многообразии медиальных полугрупп V выполняется сверхтождество d_1^0 [d_2^0] тогда и только тогда, когда в V выполняются тождества $x^2 = x^3, xyz = x^2yz, xyz = xyz^2$.

(ii) В многообразии коммутативных полугрупп V выполняется сверхтождество d_1^0 [d_2^0] тогда и только тогда, когда в V выполняются тождества $x^2 = x^3$, $xyz = x^2yz$.

(iii) В многообразии идемпотентных полугрупп V выполняется сверхтождество d_1^0 [d_2^0] тогда и только тогда, когда в V выполняются тождества $xyz = xyxz$, $xyz = xzyz$.

Теорема 2. Если в некотором многообразии полугрупп V выполняется d_1^0 [d_2^0], то V сверхассоциативно, то есть в V выполняется сверхтождество ассоциативности $F(x, F(y,z)) = F(F(x,y),z)$.

2. Классические сверхтождества левой и правой дистрибутивностей ранга 2. Рассмотрим сверхтождества левой и правой дистрибутивностей ранга 2:

$$d_1^1 \quad F(x, G(y,z)) = G(F(x,y), F(x,z)) ;$$

$$d_2^1 \quad F(G(x,y),z) = G(F(x,z), F(y,z)).$$

Найдем критерии выполнимости d_1^1 и d_2^1 в произвольных многообразиях полугрупп.

Теорема 3. Для того чтобы в некотором многообразии полугрупп V выполнялось сверхтождество d_1^1 [d_2^1], необходимо и достаточно, чтобы в V выполнялись тождества $xyz = xyxz, xyz = xzyz$, $x = x^2$.

Следствие 3. В произвольном многообразии полугрупп сверхтождества d_1^1 и d_2^1 эквивалентны.

3. Сверхтождества дистрибутивностей ранга 2, 3, 4, 5. Рассмотрим остальные сверхтождества дистрибутивности ранга 2:

$$G(x, F(y,z)) = F(F(x,y), F(x,z)) \quad (1);$$

$$F(x, G(y,z)) = F(F(x,y), F(x,z)) \quad (2);$$

$$F(x, F(y,z)) = G(F(x,y), F(x,z)) \quad (3);$$

$$F(x, F(y,z)) = F(G(x,y), F(x,z)) \quad (4);$$

$$F(x, F(y,z)) = F(F(x,y), G(x,z)) \quad (5);$$

$$G(F(x,y),z)=F(F(x,z),F(y,z)) \quad (6);$$
$$F(G(x,y),z)=F(F(x,z),F(y,z)) \quad (7);$$
$$F(F(x,y),z)=G(F(x,z),F(y,z)) \quad (8);$$
$$F(F(x,y),z)=F(G(x,z),F(y,z)) \quad (9);$$
$$F(F(x,y),z)=F(F(x,z),G(y,z)) \quad (10).$$

$F(x,F(y,z)=G(G(x,y),G(x,z))$ D_1; $F(F(x,y),z)=G(G(x,z),G(y,z))$ D_1';
$F(x,F(y,z)=G(F(x,y),G(x,z))$ D_2; $F(F(x,y),z)=G(F(x,z),G(y,z))$ D_2';
$F(x,F(y,z)=G(G(x,y),F(x,z))$ D_3; $F(F(x,y),z)=G(G(x,z),F(y,z))$ D_3';
$F(x,F(y,z)=F(G(x,y),G(x,z))$ D_4; $F(F(x,y),z)=F(G(x,z),G(y,z))$ D_4';
$F(x,G(y,z)=F(G(x,y),F(x,z))$ D_5; $F(G(x,y),z)=F(G(x,z),F(y,z))$ D_5';

$F(x,G(y,z)=F(F(x,y),G(x,z))$ D_6; $F(G(x,y),z)=F(F(x,z),G(y,z))$ D_6';
$F(x,G(y,z)=G(G(x,y),F(x,z))$ D_7; $F(G(x,y),z)=G(G(x,z),F(y,z))$ D_7';
$F(x,G(y,z)=F(G(x,y),G(x,z))$ D_8; $F(G(x,y),z)=F(G(x,z),G(y,z))$ D_8';
$F(x,G(y,z)=G(F(x,y),G(x,z))$ D_9; $F(G(x,y),z)=G(F(x,z),G(y,z))$ D_9';

Легко показать, что если в многообразии полугрупп выполняется хотя бы одно из вышеперечисленных сверхтождеств, то оно тривиально (достаточно подставить в (1), (3), (5), (10), D_2, D_3, D_5 – D_8, D_7', D_8' термы $F(x,y)=x$, $G(x,y)=y$, а в остальные – $F(x,y)=y$, $G(x,y)=x$).

Рассмотрим известные нам сверхтождества дистрибутивности как предсверхтождества. Ясно, что критерий выполнимости для $d_1^0, d_2^0, d_1^1, d_2^1$ как сверхтождеств совпадает с их критерием выполнимости как предсверхтождеств.

Лемма 1. Если в многообразии полугрупп V выполняются тождества $x^2=x^3$ и $x^2=y^2$, тогда V имеет лишь следующие термы: $t_1(x,y)=x$, $t_2(x,y)=y$, $t_3(x,y)=xy$, $t_4(x,y)=yx$, $t_5(x,y)=xyx$, $t_6(x,y)=yxy$, $t_7(x,y)=x^2$.

Теперь рассмотрим сверхтождества дистрибутивности рангов 3,4,5.

Ранг 3:

d_1^3 $F(x,G(y,z))=U(F(x,y),F(x,z))$; $d_1'^3$ $F(G(x,y),z)=U(F(x,z),F(y,z))$;
d_2^3 $F(x,G(y,z))=U(G(x,y),G(x,z))$; $d_2'^3$ $F(G(x,y),z)=U(G(x,z),G(y,z))$;
d_3^3 $F(x,G(y,z))=U(U(x,y),U(x,z))$; $d_3'^3$ $F(G(x,y),z)=U(U(x,z),U(y,z))$;
d_4^3 $F(x,G(y,z))=U(F(x,y),G(x,z))$; $d_4'^3$ $F(G(x,y),z)=U(F(x,z),G(y,z))$;
d_5^3 $F(x,G(y,z))=U(G(x,y),F(x,z))$; $d_5'^3$ $F(G(x,y),z)=U(G(x,z),F(y,z))$;
d_6^3 $F(x,G(y,z))=U(U(x,y),F(x,z))$; $d_6'^3$ $F(G(x,y),z)=U(U(x,z),F(y,z))$;
d_7^3 $F(x,G(y,z))=U(F(x,y),U(x,z))$; $d_7'^3$ $F(G(x,y),z)=U(F(x,z),U(y,z))$;
d_8^3 $F(x,G(y,z))=U(U(x,y),G(x,z))$; $d_8'^3$ $F(G(x,y),z)=U(U(x,z),G(y,z))$;
d_9^3 $F(x,G(y,z))=U(G(x,y),U(x,z))$; $d_9'^3$ $F(G(x,y),z)=U(G(x,z),U(y,z))$;
d_{10}^3 $F(x,G(y,z))=F(F(x,y),U(x,z))$; $d_{10}'^3$ $F(G(x,y),z)=F(F(x,z),U(y,z))$;

d_{11}^3 $F(x,G(y,z)) = F(U(x,y),F(x,z))$; $d_{11}'^3$ $F(G(x,y),z) = F(U(x,z),F(y,z))$;

d_{12}^3 $F(x,G(y,z)) = F(G(x,y),U(x,z))$; $d_{12}'^3$ $F(G(x,y),z) = F(G(x,z),U(y,z))$;

d_{13}^3 $F(x,G(y,z)) = F(U(x,y),G(x,z))$; $d_{13}'^3$ $F(G(x,y),z) = F(U(x,z),G(y,z))$;

d_{14}^3 $F(x,G(y,z)) = G(F(x,y),U(x,z))$; $d_{14}'^3$ $F(G(x,y),z) = G(F(x,z),G(y,z))$;

d_{15}^3 $F(x,G(y,z)) = G(U(x,y),F(x,z))$; $d_{15}'^3$ $F(G(x,y),z) = G(U(x,z),F(y,z))$;

d_{16}^3 $F(x,G(y,z)) = G(G(x,y),U(x,z))$; $d_{16}'^3$ $F(G(x,y),z) = G(G(x,z),U(y,z))$;

d_{17}^3 $F(x,G(y,z)) = G(U(x,y),G(x,z))$; $d_{17}'^3$ $F(G(x,y),z) = G(U(x,z),G(y,z))$;

d_{18}^3 $F(x,F(y,z)) = G(U(x,y),F(x,z))$; $d_{18}'^3$ $F(F(x,y),z) = G(U(x,z),F(y,z))$;

d_{19}^3 $F(x,F(y,z)) = G(U(x,y),G(x,z))$; $d_{19}'^3$ $F(F(x,y),z) = G(U(x,z),G(y,z))$;

d_{20}^3 $F(x,F(y,z)) = G(U(x,y),U(x,z))$; $d_{20}'^3$ $F(F(x,y),z) = G(U(x,z),U(y,z))$;

d_{21}^3 $F(x,F(y,z)) = F(G(x,y),U(x,z))$; $d_{21}'^3$ $F(F(x,y),z) = F(G(x,z),U(y,z))$;

d_{22}^3 $F(x,F(y,z)) = G(F(x,y),U(x,z))$; $d_{22}'^3$ $F(F(x,y),z) = G(F(x,z),U(y,z))$;

d_{23}^3 $F(x,F(y,z)) = G(G(x,y),U(x,z))$; $d_{23}'^3$ $F(F(x,y),z) = G(G(x,z),U(y,z))$;

Ранг 4:

d_1^4 $F(x,G(y,z)) = U(V(x,y),F(x,z))$; $d_1'^4$ $F(G(x,y),z) = U(V(x,z),F(y,z))$;

d_2^4 $F(x,G(y,z)) = U(V(x,y),G(x,z))$; $d_2'^4$ $F(G(x,y),z) = U(V(x,z),G(y,z))$;

d_3^4 $F(x,G(y,z)) = U(V(x,y),U(x,z))$; $d_3'^4$ $F(G(x,y),z) = U(V(x,z),U(y,z))$;

d_4^4 $F(x,G(y,z)) = U(V(x,y),V(x,z))$; $d_4'^4$ $F(G(x,y),z) = U(V(x,z),V(y,z))$;

d_5^4 $F(x,G(y,z)) = U(F(x,y),V(x,z))$; $d_5'^4$ $F(G(x,y),z) = U(F(x,z),V(y,z))$;

d_6^4 $F(x,G(y,z)) = U(G(x,y),V(x,z))$; $d_6'^4$ $F(G(x,y),z) = U(G(x,z),V(y,z))$;

d_7^4 $F(x,G(y,z)) = U(U(x,y),V(x,z))$; $d_7'^4$ $F(G(x,y),z) = U(U(x,z),V(y,z))$;

d_8^4 $F(x,G(y,z)) = F(U(x,y),V(x,z))$; $d_8'^4$ $F(G(x,y),z) = F(U(x,z),V(y,z))$;

d_9^4 $F(x,G(y,z)) = G(U(x,y),V(x,z))$; $d_9'^4$ $F(G(x,y),z) = G(U(x,z),V(y,z))$;

d_{10}^4 $F(x,F(y,z)) = G(U(x,y),V(x,z))$; $d_{10}'^4$ $F(F(x,y),z) = G(U(x,z),V(y,z))$;

Ранг 5:

d^5 $F(x,G(y,z)) = U(V(x,y),W(x,z))$; d'^5 $F(G(x,y),z) = U(V(x,z),W(y,z))$.

Теорема 4. Для того чтобы в многообразии полугрупп V выполнялось хотя бы одно из предсверхтождеств (1)–(10) , $D_1 - D_9$, $D_1' - D_9'$ или предсверхтождеств дистрибутивности рангов 3, 4, 5, необходимо и достаточно, чтобы в нем выполнялись тождества $x^2 = y^2, x^2 = x^3,\ xyz = x^2$.

Следствие 4. В произвольном многообразии полугрупп предсверхтождества (1)–(10), $D_1 - D_9$, $D_1' - D_9'$, $d_1^3 - d_{23}^3, d_1'^3 - d_{23}'^3$ $d_1^4 - d_{10}^4$, $d_1^4 - d_{10}^4, d_1'^4 - d_{10}'^4, d^5, d'^5$ эквивалентны.

Кафедра алгебры и геометрии

Поступила 18.05.1999

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мовсисян Ю.М.** Сверхтождества в алгебрах и многообразиях. – Успехи математических наук,1998, т.53, в.1(319), с.61-114.
2. **Denecke K. and Koppitz J.** Hyperassociativity of semigroups.– Semigroup Forum, 1994, v.49, p. 41-48.

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ , Ի. Ռ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ԱՋ ԵՎ ՁԱԽ ԲԱՇԽԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԳԵՐՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԿԻՍԱԽՄԲԵՐԻ ԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ամփոփում

Հավասարությունը կիսախմբերի բազմաձևության մեջ կոչվում է գերնույնություն, եթե այդ բազմաձևության կամայական թերմ տեղադրելով հավասարության ֆունկցիոնալ սիմվոլների մեջ, ստանում ենք նույնություն:

Հավասարությունը կիսախմբերի բազմաձևության մեջ կոչվում է նախա-գերնույնություն, եթե այդ բազմաձևության կամայական թերմ տեղադրելով հավասարության ֆունկցիոնալ սիմվոլների մեջ, բացառությամբ պրոյեկցիայի թերմերի, ստանում ենք նույնություն:

Այս աշխատանքում տրվում են տարբեր ռանգերի աջ և ձախ բաշխականության գերնույնությունների և նախա-գերնույնությունների անհրաժեշտ և բավարար պայմանները: