ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,1997 Естественные науки

Механика

УДК 62.50

В.Р. БАРСЕГЯН, В.В. АЙРАПЕТЯН

К ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕМБРАНЫ

Исследована задача оптимального наблюдения управляемых движений мембраны. Предполагается, что из некоторых областей мембраны, которые характеризуются функциями из класса $L_2[0,b]\times[0,c]$, поступает сигнал. При помощи некоторой предыстории поступающего сигнала, построена универсальная оптимальная операция, позволяющая определить прогиб и скорость всех точек мембраны в любой момент времени.

1.**Постановка задачи**. Рассмотрим однородную, упругую, прямоугольную мембрану, края которой закреплены. Пусть на мембрану действуют распределенные силы с плотностью $u(x,y,t)$, перпендикулярные поверхности мембраны. Ограничимся рассмотрением малых колебаний мембраны и предположим, что область, на которую действуют распределенные силы, имеет положительную меру по Лебегу.

Пусть прогиб мембраны будет $Q(x,y,t), 0\le x\le b, 0\le y\le c,\ t\ge 0$, подчиненный при $0<x<b, 0<y<c$ и $t>0$ уравнению [1]

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right)+u(x,y,t) \tag{1.1}$$

и граничным условиям

$$\begin{array}{ll} Q(x,0,t)=0, & Q(x,c,t)=0, \\ Q(0,y,t)=0, & Q(b,y,t)=0. \end{array} \quad t>0 \tag{1.2}$$

В правой части уравнения (1.1) функция $u(x,y,t)$ - плотность внешней силы, рассчитанная на единицу массы мембраны, $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$, где T_0 - натяжение, а ρ - плотность мембраны.

При рассмотрении задачи об управлении колебаниями мембраны по принципу обратной связи возникает необходимость в вычислении текущего состояния $Q(x,y,t)$ и скорости $\dot{Q}(x,y,t)$ мембраны для любой точки $x\in[0,b], y\in[0,c]$, каким бы не было реализовавшееся в процессе (1.1) значение $Q(x,y,t)$.

Допустим есть возможность с помощью измерительных устройств на некоторых областях положительной меры мембраны измерить некоторую величину, определенную на промежутке времени $t-\theta\le\tau\le t$, где $\theta>0$, постоянное число, учитывает некоторую предысторию поступающего сигнала. Число ϑ определяется из дополнительных требований, сопровождающих задачу о наблюдении, и зависит от физических возможностей измерительных устройств. Но так как наблюдаемый объект подвержен управляющему воздействию $u(x,y,t)$, нужна еще информация о предыстории управляющей силы.

В отличие от поступающего сигнала, который известен в пределах отрезка $t-\vartheta\le\tau\le t$, значение управляющего воздействия в момент времени t в учитываемую предысторию не включается. Для функции $u(x,y,t)$ аргумент заключен в пределах полуинтервала $t-\vartheta\le\tau<t$, так как значение состояния мембраны $Q(x,y,t)$ в момент t необходимо как раз для того, чтобы выработать управление в этот же момент времени.

Предполагается, что области мембраны, подлежащие измерению, характеризуются функциями $f(x,y)$ и $g(x,y)$ из класса $L_2[0,b]\times[0,c]$. В частном случае они могут быть характеристическими функциями измеримых областей.

Требуется по поступающему сигналу вычислить функцию состояния $Q(x,y,t)$ и скорость $\dot{Q}(x,y,t)$ мембраны для любой точки $(x,y)\in[0,b]\times[0,c]$, каковым бы не было реализовавшееся в процессе (1.1) значение $Q(x,y,t)$.

Известно, что решение уравнения (1.1) имеет следующий вид

$$Q(x,y,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty}Q(t)\sin\frac{\pi k}{b}x\sin\frac{\pi m}{c}y, \tag{1.3}$$

где функции $Q_{km}(t)$ удовлетворяют системе бесконечных уравнений

$$\ddot{Q}_{km}(t)=-\lambda_{km}^2(t)Q_{km}(t)+u_{km}(t), \tag{1.4}$$

$$\lambda_{km}^2=a^2\left[\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{c}\right)^2\right],\quad k,m=1,2,\cdots$$

Здесь функции $u_{km}(t)$ являются коэффициентами Фурье $u(x,y,t)$ в области $[0,b]\times[0,c]$

$$u_{km}(t)=\frac{4}{bc}\int_0^b\int_0^c u(x,y,t)\sin\frac{\pi k}{b}x\sin\frac{\pi m}{c}y\,dxdy, \tag{1.5}$$

которые для каждой пары индексов k,m отличны от нуля.

Введя обозначения

$$Q_{km}^{(1)}(t)=Q_{km}(t),\quad Q_{km}^{(2)}(t)=\frac{1}{\lambda_{km}}\dot{Q}_{km}(t), \tag{1.6}$$

уравнение (1.4) запишем в нормальной форме

$$\begin{gathered}\dot{Q}_{km}^{(1)}(t)=\lambda_{km}Q_{km}^{(2)}(t),\\ \dot{Q}_{km}^{(2)}(t)=-\lambda_{km}Q_{km}^{(1)}(t)+\frac{1}{\lambda_{km}}u_{km}(t),\quad k,m=1,2,\cdots\end{gathered} \tag{1.7}$$

Обозначим коэффициенты рядов Фурье функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ в вышеупомянутом базисе следующим образом

$$\begin{gathered}f_{km}=\frac{4}{bc}\int_0^b\int_0^c f(x,y)\sin\frac{\pi k}{b}x\sin\frac{\pi m}{c}y\,dxdy,\\ g_{km}=\frac{4}{bc}\int_0^b\int_0^c g(x,y)\sin\frac{\pi k}{b}x\sin\frac{\pi m}{c}y\,dxdy.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Коэффициенты f_{km} и g_{km} известны заранее, так как известны функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$. Предполагается, что $f_{km}^2 + g_{km}^2 \neq 0$ [2] для каждого $k,m = 1,2,\cdots$

Предполагается, что для каждого $k,m = 1,2,\cdots$ через измерительное устройство поступает сигнал

$$f_{km} Q_{km}^{(1)}(\tau) + g_{km}\, Q_{km}^{(2)}(\tau),\ t-\vartheta \le \tau \le t. \tag{1.9}$$

Вообще, поступающие сигналы могут быть различными. Целесообразность выбора такого сигнала обусловлена содержанием достаточного количества информации и несложной реализацией. Для каждого $k,m = 1,2,\cdots$ рассмотрим по отношению к (1.9) "усиленный сигнал"

$$y_{km}(\tau) = \lambda_{km}^{\alpha} f_{km} Q_{km}^{(1)}(\tau) + \lambda_{km}^{\alpha} g_{km} Q_{km}^{(2)}(\tau),\quad t-\vartheta \le \tau \le t, \tag{1.10}$$

реализация которого также нетрудна. Здесь $\alpha = 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ - малое число.

Таким образом, для каждой пары индексов $k,m = 1,2,\cdots$ имеем следующую задачу наблюдения.

Требуется найти линейную операцию $\varphi_{kmi}[t,\{y_{km}(\tau), u_{km}(\tau)\}]$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi_{kmi}[t,\{y_{km}(\tau), u_{km}(\tau)\}] = Q_{km}^{(i)}(t),\ i = 1,2, \tag{1.11}$$

каким бы ни было реализовавшееся в системе (1.7) значение $Q_{km}^{(i)}(t)$ и каким бы ни был сигнал (1.10).

Операции φ_{kmi}, удовлетворяющие условию (1.11) назовем разрешающими операциями.

Отметим, что выражение

$$\frac{bc}{4}\sum_{k,m=1}^{\infty}\left(f_{km}\, Q_{km}(\tau) + g_{km}\, \dot{Q}_{km}(\tau)\right),$$

общим членом которого является выбранный сигнал (1.9), после подстановки значений f_{km} и g_{km} из (1.8) с учетом (1.3) приводится к виду

$$\int_0^b\int_0^c \left[f(x,y)\, Q(x,y,\tau) + g(x,y)\, \dot{Q}(x,y,\tau)\right] dxdy.$$

2. **Приведение задачи наблюдения к проблеме моментов и ее решение**. Разрешающие операции $\varphi_{kmi}[t,\{y_{km}(\tau), u_{km}(\tau)\}]$ составим следующим образом [3,4]:

$$\varphi_{kmi}[t,\{y_{km}(\tau), u_{km}(\tau)\}] = \overline{\varphi}_{kmi}[t, y_{km}(\tau)] - \overline{\varphi}_{kmi}\left[t, G_{km}\int_t^{\zeta} H_{km}(\zeta,\tau)\, u_{km}(\tau)\, d\tau\right], \tag{2.1}$$

где $\overline{\varphi}_{kmi}$ - разрешающая операция при условии $u_{km} \equiv 0$, т. е.

$$\overline{\varphi}_{kmi}[t, y_{km}(\tau)] = Q_{km}^{(i)}(t) \tag{2.2}$$

и приняты следующие обозначения

$$G_{km} = \left(\lambda_{km}^{\alpha} f_{km}, \lambda_{km}^{\alpha} g_{km}\right) H_{km}(\zeta,\tau) = X_{km}(\zeta,\tau) B_{km},$$

где $X_{km}(\zeta,\tau)$ - нормированная фундаментальная матрица однородной части системы (1.7) и имеет вид

$$X_{km}(\zeta,\tau) = \begin{pmatrix} \cos\lambda_{km}(\zeta-\tau) & \sin\lambda_{km}(\zeta-\tau) \\ -\sin\lambda_{km}(\zeta-\tau) & \cos\lambda_{km}(\zeta-\tau) \end{pmatrix},\ B_{km} = \begin{pmatrix} 1, \dfrac{1}{\lambda_{km}} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Для построения операции $\varphi_{kmi}\left[t,\{v_{km}(\tau),\ u_{km}(\tau)\}\right]$ достаточно построить разрешающие операции $\overline{\varphi}_{kmi}\left[t,y_{km}(\tau)\right]$ для системы

$$
\begin{aligned}
&\dot{Q}^{(1)}_{km}(\tau)=\lambda_{km}Q^{(2)}_{km}(\tau),\\
&\dot{Q}^{(2)}_{km}(\tau)=-\lambda_{km}Q^{(1)}_{km}(\tau),\quad k,m=1,2,\cdots,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

удовлетворяющей условию (2.2) [3].

Решение системы (2.4) для каждого $k,m=1,2,\cdots$, согласно формуле Коши, запишется в следуюшем виде:

$$\overline{Q}_{km}(\tau)=X_{km}(\tau,t)\overline{Q}_{km}(t),\tag{2.5}$$

где

$$\overline{Q}_{km}(\tau)=\begin{pmatrix}Q^{(1)}_{km}(\tau)\\ Q^{(2)}_{km}(\tau)\end{pmatrix}.$$

Из (1.10) и (2.5) получаем

$$y_{km}(\tau)=G_{km}X_{km}(\tau,t)\ \overline{Q}_{km}(t),\ t-\vartheta\le\tau\le t.\tag{2.6}$$

Операции, вычисляющие функции $Q^{(1)}_{km}(t)$ и $Q^{(2)}_{km}(t)$ по сигналу (2.6), будем искать в виде

$$\int\limits_{t-\vartheta}^{t}y_{km}(\tau)\overline{V}_{kmi}(t,\tau)d\tau=Q^{(i)}_{km}(t),\quad i=1,2;\quad k,m=1,2,\cdots\tag{2.7}$$

Подставляя $y_{km}(\tau)$ из (2.6) в (2.7), выполняя замену переменного $\tau-t=\xi$ и введя обозначение $\overline{V}_{kmi}(t,t+\xi)=V_{kmi}(\xi),\quad i=1,2$, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{-\vartheta}^{0}\left(f_{km}\cos\lambda_{km}\xi-g_{km}\sin\lambda_{km}\xi\right)V_{km1}(\xi)\ d\xi=\frac{1}{\lambda^{\alpha}_{km}},\\
&\int\limits_{-\vartheta}^{0}\left(f_{km}\sin\lambda_{km}\xi+g_{km}\cos\lambda_{km}\xi\right)V_{km1}(\xi)\ d\xi=0,\\
&\int\limits_{-\vartheta}^{0}\left(f_{km}\cos\lambda_{km}\xi-g_{km}\sin\lambda_{km}\xi\right)V_{km2}(\xi)\ d\xi=0,\\
&\int\limits_{-\vartheta}^{0}\left(f_{km}\sin\lambda_{km}\xi+g_{km}\cos\lambda_{km}\xi\right)V_{km2}(\xi)\ d\xi=\frac{1}{\lambda^{\alpha}_{km}}.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Для каждого $k,m=1,2,\cdots$ найдем функции $V_{km1}(\xi)$ и $V_{km2}(\xi)$, удовлетворяющие условиям (2.8) и являющиеся оптимальными в смысле

$$\int\limits_{-\vartheta}^{0}\left[V^2_{km1}(\xi)+V^2_{km2}(\xi)\right]d\xi\to\min.\tag{2.9}$$

Решая полученную вариационную задачу (2.8), (2.9) с помощью проблемы моментов [3] для оптимальных функций $V^0_{km1}(\xi),\ V^0_{km2}(\xi)$, получим

$$
\begin{aligned}
V^0_{km1}(\xi)=A_{km}&\left\{\left(g^2_{km}\sigma_{km1}+2f_{km}g_{km}\sigma_{km3}+f^2_{km}\sigma_{km2}\right)\left(f_{km}\cos\lambda_{km}\xi-g_{km}\sin\lambda_{km}\xi\right)-\right.\\
&\left.-\left[f_{km}g_{km}(\sigma_{km1}-\sigma_{km2})+\left(f^2_{km}-g^2_{km}\right)\sigma_{km3}\right]\left(f_{km}\sin\lambda_{km}\xi+g_{km}\cos\lambda_{km}\xi\right)\right\},
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

$$V_{km2}^0(\xi)=A_{km}\{-[f_{km}g_{km}(\sigma_{km1}-\sigma_{km2})+(f_{km}^2-g_{km}^2)\,\sigma_{km3}](f_{km}\cos\lambda_{km}\xi-$$
$$-g_{km}\sin\lambda_{km}\xi)+(f_{km}^2\sigma_{km1}-2f_{km}g_{km}\sigma_{km3}+g_{km}^2\sigma_{km2})(f_{km}\sin\lambda_{km}\xi+g_{km}\cos\lambda_{km}\xi)\}$$

где (2.11)

$$A_{km}=2[\lambda_{km}^{\alpha}(\sigma_{km1}\sigma_{km2}-\sigma_{km3}^2)(f_{km}^2+g_{km}^2)]^{-1}$$
$$\sigma_{km1}=\vartheta+\frac{\sin 2\lambda_{km}\vartheta}{2\lambda_{km}},\ \sigma_{km2}=\vartheta-\frac{\sin 2\lambda_{km}\vartheta}{2\lambda_{km}},\ \sigma_{km3}=-\frac{\sin^2\lambda_{km}\vartheta}{\lambda_{km}}.$$

Чтобы показать ограниченность нормы бесконечномерного вектора, компонентами которого являются найденные универсальные функции $V_{km1}^0(\xi)$, $V_{km2}^0(\xi)$, составим квадрат выражения нормы

$$\|V^0\|^2=\int_{-\vartheta}^{0}\left\{\sum_{k,m=1}^{\infty}\left[(V_{km1}^0(\xi))^2+(V_{km2}^0(\xi))^2\right]\right\}d\xi.$$

Проведя соответствующие вычисления, получим

$$\|V^0\|^2=\sum_{km=1}^{\infty}\frac{4}{\theta\lambda_{km}^{2\alpha}\left(1-\dfrac{\sin^2\lambda_{km}\theta}{\lambda_{km}^2\theta^2}\right)(f_{km}^2+g_{km}^2)}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) видно, что выбором функций $f(x,y), g(x,y)$ можно улучшить сходимость этого ряда.

Таким образом построили оптимальные операции $\overline{\varphi}_{kmi}^0$, $i=1,2$ в виде

$$\overline{\varphi}_{kmi}^0[t,y_{km}(t+\xi)]=\int_{-\vartheta}^{0}V_{kmi}^0(\xi)y_{km}(t+\xi)\,d\xi. \tag{2.13}$$

(2.13) является первым слагаемым правой части выражения (2.1).

Операции, разрешающие задачу наблюдения системы (1.7) по сигналу (1.10), согласно (2.1), будут

$$\varphi_{kmi}^0=[t,\{y_{km}(t+\xi),u_{km}(t+\xi)\}]=\overline{\varphi}_{kmi}^0[t,y_{km}(t+\xi)]-$$
$$-\overline{\varphi}_{kmi}^0\left[t,G_{km}\int_0^{\eta}H_{km}(t+\eta,t+\xi)\,u_{km}(t+\xi)d\xi\right], \tag{2.14}$$

где

$$H_{km}(t+\eta,t+\xi)=\begin{pmatrix}\sin\lambda_{km}(\eta-\xi)\\ \cos\lambda_{km}(\eta-\xi)\end{pmatrix}.$$

Для второго слагаемого выражения (2.14) с учетом (2.13) и (1.10) после соответствующих вычислений получим

$$\overline{\varphi}_{kmi}^0\left[t,G_{km}\int_0^{\eta}H_{km}(\eta+\xi,\eta+\xi)\,u_{km}(t+\xi)d\xi\right]=$$
$$=\int_{-\vartheta}^{0}V_{kmi}^0(\xi)\lambda_{km}^{\alpha-1}u_{km}(t+\xi)\left[f_{km}\sin\lambda_{km}\xi+g_{km}(\cos\lambda_{km}\xi-1)\right]d\xi. \tag{2.15}$$

Итак, с учетом оптимальных функций $V_{km1}^0(\xi)$, $V_{km2}^0(\xi)$ из (2.10), (2.11), значения измерения $y_{km}(\tau)$ из (1.10) и формул (2.13) и (2.15) функции $Q_{km}^{(i)}(t)$, $i=1,2$, определятся по формуле

$$
\begin{aligned}
Q_{km}^{(i)}(t) = & \int\limits_{t-\vartheta}^{t} y_{km} \overline{V}_{kmi}^{0}(t,\tau)\, d\tau - \int\limits_{t-\vartheta}^{t} \overline{V}_{kmi}^{0}(t,\tau) \lambda_{km}^{\alpha-1} u_{km}(\tau) \times \\
& \times \left[f_{km} \sin \lambda_{km}(\tau - t) + g_{km} \left(\cos \lambda_{km}(\tau - t) - 1 \right) \right] d\tau .
\end{aligned}
\tag{216}
$$

Подставляя значение функции $Q_{km}(t) \equiv Q_{km}^{(1)}(t)$ из (2.16) в выражение (1.3), будем иметь функцию состояния $Q(x,y,t)$ мембраны в момент времени t (аналогичным образом и $\dot{Q}(x,y,t)$) для любой точки $x \in (0,b)$, $y \in (0,c)$.

Кафедра теоретической механики *Поступила 23.06.1997*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.**, Уравнения математической физики. 1977.
2. **Габриелян М. С.** О стабилизации неустойчивых движений механических систем. Прикладная математика и механика. 1964, т.28, вып.3.
3. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
4. **Куржанский А. Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

Վ.Ռ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Վ.Վ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՄԵՄԲՐԱՆԻ ՂԵԿԱՎԱՐՎՈՂ ՏԱՏԱՆՈՂԱԿԱՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԻՏՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հետազոտված է արտաքին ուժերի միջոցով ղեկավարվող մեմբրանի տատանողական շարժման օպտիմալ դիտման խնդիրը: Ենթադրվում է, որ մեմբրանի որոշ դրական չափի տիրույթներից, որոնք նկարագրվում են $L_2[0;b]\times[0;c]$ դասի ֆունկցիաներով, ստացվում է ազդակ: Հաշվի առնելով յուրաքանչյուր հարմոնիկի համար ստացվող որոշ նախապատմություն, կառուցվում է օպտիմալ գործողություն, որի միջոցով որոշվում է մեմբրանի բոլոր կետերի ճկվածքը և արագությունը ժամանակի ցանկացած պահին: