ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 1989 Естественные науки

Математика

УДК 621.391.15

Г.Л.МОВСИСЯН, Ж.Г.МАРГАРЯН

О СОВЕРШЕННЫХ РАВНОВЕСНЫХ КОДАХ

В работе приводятся все известные необходимые условия существования совершенных равновесных кодов, а также доказывается новое необходимое условие.

Пусть E_n —пространство двоичных последовательностей длины n с метрикой Хемминга $\rho(x,y)$, $x,y \in E_n$. Последовательности будем называть точками.

Обозначим через E_n^k подмножество E_n, каждая точка которого имеет ровно k единиц, а через $A(n,k,d) \leqslant E_n^k$ код максимальной мощности с расстоянием d.

Код A(n,k,d) называется совершенным равновесным, если его мощность удовлетворяет следующему условию:

$$|A(n,k,d)| = C_n^k / \sum_{i=0}^{[d/4]} C_k^i C_{n-k}^i.$$

Ясно, что совершенный равновесный код разбивает множество E_n^k на шары радиусом 2t с центрами в кодовых точках и, следовательно, — $d=4t+2$.

Совершенные равновесные коды впервые были рассмотрены Фрайманом (см. [1]). Известная теорема Ллойда [2] обобщена для этих кодов независимо Дельсартом [3] и Бигсом [4].

Теорема I [3]. Если существует совершенный равновесный код, то нули многочлена

$$\sum_{j=0}^{t} (-1)^j C_{x-1}^j C_{k-x}^{t-j} C_{n-k-x}^{t-j}$$

содержатся во множестве $N = \{1,2,\dots,n\}$.

Из приведенной теоремы нетрудно получить

Следствие I. Нули $x_1, x_2, \dots, x_{2t}$ указанного многочлена должны удовлетворять условиям

$$1. \prod_{i=1}^{2t} x_i = (t!)^2 \sum_{i=0}^{t} C_k^i C_{n-k}^i,$$

$$2. \sum_{i=1}^{2t} x_i = t(n+1).$$

Дельсарт сделал предположение [3] о несуществовании нетривиальных совершенных равновесных кодов (тривиальными являются код, состоящий из одной точки, и $A(4t+2,\ 2t+1,\ 4t+2)$. Он также предположил, что доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы о несуществовании совершенных равновесных кодов (кроме известных), где успешно использовалась теорема Ллойда (см. [5,6]). Однако для совершенных кодов использование теоремы Ллойда заметных результатов не дает [7].

Следует отметить результаты, полученные в работе [8].

Теорема 2 [8]. Необходимым условием существования нетривиального совершенного равновесного кода являются

1. $(2t+1)(k+1)/(t+1) \leqslant n \leqslant (2t+1)(k-1)/t$,

2. $k \geqslant t^2+3t+1$,

3. целочисленность выражений $\frac{k+1}{t+1}, \frac{n-k+1}{t+1}$.

Код $A(n,k,d)$ называется $s(l,k,n)$ системой Штейнера, если в матрице, строками которой являются все точки из кода, любые l различных столбцов содержат строку $(1,1,...,1)$ точно один раз.

Ниже доказывается новое условие.

Теорема 3. Если код $A(n,k,4t+2)$ — нетривиальный совершенный равновесный, то существуют системы Штейнера $s(t+1,2t+1,n-k)$ и $s(t+1,2t+1,k)$.

Доказательство. Не нарушая общности, предположим

$$x = x_1x_2 \in A(n,k,4t+2), \quad x_1 \in E_k^k, \quad x_2 \in E_{n-k}^0.$$

Пусть y — любая точка из E_k^{k-t-1}. Через $B(y)$ обозначим множество состоящих из всех точек $z \in E_{n-k}^{2t+1}$, для которых существует $z_1 \in E_k^{k-2t-1}$ такое,что $z_1z \in A(n,k,4t+2), \rho(z_1,y)=t$.

Докажем, что $B(y)$ является $s(t+1,2t+1,n-k)$ системой Штейнера. Рассмотрим точку yy_1, где $y_1 \in E_{n-k}^{2t+1}$. Поскольку $\rho(x,yy_1)=2t+2$, то существует точка $z=z_1z_2 \in A(n,k,4t+2)$ такая,что $\rho(z_1z_2,yy_1) \leqslant 2t$. Ясно, что $\rho(x,z) \geqslant 4t+2$. Отсюда нетрудно получить,что

$$z_1 \in E_k^{k-2t-1}, z_2 \in E_{n-k}^{2t+1}, \rho(z_1,y)=t, \rho(z_2y)=t.$$

Следовательно, для любой точки $y_1 \in E_{n-k}^{t+1}$ существует точка $z_2 \in B(y)$ такая, что $\rho(z_2,y_1)=t$. Поскольку $|E_{n-k}^{t+1} = C_{n-k}^{t+1}|$, а число точек $y_2 \in E_{n-k}^{t+1}$, находящихся от $z_2 \in B(y)$ на расстоянии t, равно C_{2t+1}^{t+1}, то

$$|B(y)| \geqslant C_{n-k}^{t+1}/C_{2t+1}^{t+1}. \qquad (1)$$

С другой стороны, $B(y)$ является кодом из E_{n-k}^{2t+1} с минимальным расстоянием $2t+2$. Действительно, в противном случае существовали бы $z_1z_2 \in E_k^{k-2t-1}$ такие, что $\rho(z_1,z_2) \geqslant 2t+2, \rho(z_1,y)=\rho(z_2,y)=t$. Что невозможно.

Используя известную оценку (см. [9]), получаем

$$|B(y)| \leqslant \left[\frac{n-k}{2t+1}\left[\frac{n-k-1}{2t}\left[\ldots\left[\frac{n-k-t}{t+1}\right]\ldots\right]\right]\right].$$

Отсюда и из (1) следует

$$|B(y)| = C_{n-k}^{t+1}/C_{2t+1}^{t+1}.$$

А это означает (см. [10]), что $B(y)$ является $s(t+1,2t+1,n-k)$ системой Штейнера.

Далее, фиксируя любую точку $y \in E_{n-k}^{t+1}$ и определяя $B(y)$ как множество всех $z \in E_k^{k-2t-1}$, для которых существует $z_1 \in E_{n-k}^{2t+1}$ такая, что $zz_1 \in A(n,k,4t+2), \rho(z_1,y)=t$, аналогичным образом докажем, что существует $s(t+1,2t+1,k)$ система Штейнера. Теорема доказана.

Следствие. Необходимым условием существования равновесного совершенного кода является целочисленность выражений

$$C_{k-i}^{l+1-i}/C_{2l+1-i}^{l+1-i},\ C_{n-k-i}^{l+1-i}/C_{2l+1-i}^{l+1-i}$$

для всех $i=0,1,\ldots,t$.

Кафедра теории систем

Поступила 16.11.1988

ЛИТЕРАТУРА

1. Freiman C.V. Upper bounds for fixed-weight codes of specified minimum distanse.— IEEE Trans.Inform.Theory. 1964,№ 10, p. 246-248.
2. **Ллойд С.П.** Бинарное блочное кодирование.— Кибернетический сборник. М., 1960, №1,с.206-226.
3. **Дальсарт Ф.** Алгебраический подход к системам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976,с. 134.
4. Biggs N.L. Perfekt Codes in Graphs.— J.Comb. Theori, 1973,15B, p.289-296.
5. **Зиновьев В.А., Леонтьев В.К.** Несуществование совершенных кодов над полями Галуа. Проблемы управления и теории информации. М., 1973, вып.2, с. 123-132.
6. Tietavainen A.A: On the Nonexistence of Perfekt Codes over Fields.Siam.—J.Appl. Math., 1973,v. 24,№1, p. 88-96.
7. **Камерон П., Ван Линт Дж.** Теория графов, теория кодирования и блок-схемы. М.: Наука, 1980, с. 128.
8. **Мовсисян Г.Л.** Совершенные коды в схемах Джонсона. — Вест.МГУ: Вычислительная математика и кибернетика, М., 1982, сер.15, № 1, с. 64-69.
9. **Мак-Вильямс Дж.** Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979, с. 744.
10. **Семаков Н.В., Зиновьев В.А.** Совершенные и квазисовершенные коды.—Проблемы передачи информации.М., 1969, т.5, вып.2, с.14-18.

Ամփոփում

Աշխատանքում բերված են հավասար կշռով կատարյալ կոդերի գոյությանը վերաբերվող հայտնի անհրաժեշտ պայմանները, ինչպես նաև ապացուցված է նոր անհրաժեշտ պայման այդպիսի կոդերի համար:

SUMMARY

A new necessary and some well-known conditions for the existence of fixed-weight perfect codes are presented in ihe paper.