ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1988 Естественные науки

Математика

УДК 518.9

М. С. ГАБРИЕЛЯН, О. С. МИКАЕЛЯН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ ПРИ m ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ ДЛЯ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩИХСЯ СИСТЕМ

Игровые задачи сближения-уклонения при m целевых множествах и шаг за шагом меняющихся системах ставятся в классе квазистратегий, определенных на множестве программных управлений. При этом условие Липшица заменяется условием обобщенной единственности, а условие существования седловой точки в маленькой игре—более слабыми условиями согласованности наборов ресурсов. Доказывается утверждение, аналогичное теореме о существовании цены в дифференциальной игре.

§ 1. Управляемые системы. Рассмотрим управляемые системы $\sum_{\{k\}}^{(1)}$ и $\sum_{\{k\}}^{(2)}$, описываемые соответственно дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_k^{(i)}=f_k^{(i)}(t,\ x_k^{(i)},\ u_k^{(i)},\ v_k^{(i)}),\ (i=1,\ 2),\ k=I=\{1,\ \ldots,\ m\},$$

где $f_k^{(i)}:[t_0,\quad \infty)\times R_n\times P_k^{(i)}\times Q_k^{(i)}—R_n$—непрерывные функции, $P_k^{(i)}\subset \subset R^{p_k(i)}$, $Q_k^{(i)}\subset R^{g_k(i)}$—компакты, при этом

$$|x'f_k^{(i)}(t,\ x,\ u_k^{(i)},\ v_k^{(i)})|<\varkappa_k^{(i)}(1+\|x\|^2) \tag{1.1}$$

$$(\varkappa_k^{(i)}>0) \text{ при } (t,\ x,\ u_k^{(i)},\ v_k^{(i)})\in[t_0,\ \infty)\times R^n\times P_k^{(i)}\times Q_k^{(i)}.$$

Пусть $\mu_k^{(i)}$ $(i=1,\ 2;\ k\in I)$—множества всех вероятностных мер на σ-алгебре борелевских подмножеств множества $P_k^{(i)}\times Q_k^{(i)}$. Для $\forall$ $\nu\in\mu_k^{(i)}$ и любой непрерывной функции $g:P_k^{(i)}\times Q_k^{(i)}\to R^s$ введем обозначение ([1], стр. 297)

$$g(\nu)=\int\limits_{P_k^{(i)}\times Q_k^{(i)}} g(u_k^{(i)},\ v_k^{(i)})\nu(d(u_k^{(i)},\ v_k^{(i)})).$$

Программным управление на $[t_*,\ \infty)$ $(r_*\geqslant t_0)$ системы $\sum_k^{(i)}$ будем называть всякую функцию $\eta:[t_*,\ \infty)\to\mu_k^{(i)}$ такую, что для любой непрерывной функции $g:P_k^{(i)}\times Q_k^{(i)}\to R^1$ отображение $t\to g(\eta(t)):[t_*,\ \infty)\to R_1$ измеримо по Лебегу.

Множество всех таких управлений обозначим через $H_k^{(i)}(t_*)$.

Пусть $t_0<t_1^{(i)}<t_2^{(i)}<\cdots<t_{m-1}^{(i)}$—набор чисел.

Программным движением систем $\sum_{\{k\}}^{(i)}(i=1,\ 2)$ порожденным управлением $\eta_{\{k\}}$ $(\eta_k\in H_k^{(i)}(t_{k-1}),\ k\in I,\ (t_0=t_*))$ из позиции $(t_*,\ x_*)$ $(t_*\in$

$\in[t_0, t_1]$), будем называть непрерывные склейки в точках $(t_\alpha, x_\alpha(t_\alpha))$ $(\alpha\in I)$ всяких решений в смысле Каратеодори дифференциальных уравнений $\dot{x}_k^{(i)}=f_k^{(i)}(t, x_k^{(i)}, \eta_k(t))$ $t\in[t_{k-1}^{(i)}, t_k^{(i)}]$ при $k=2, \cdots, m-1$ и $t\in[t_*, t_1^{(i)}]$ при $k=1$ $(x_k^{(i)}(t_k^{(i)})=x_{k+1}^{(i)}(t_k)$, $k=1, \cdots, m-1)$ на полуоси $[t_*, \infty)$ с начальным условием $x^{(i)}(t_*)=x_*^{(i)}(x^{(i)}(t_*)=x_1^{(i)}(t_*))$.

Предположим, что при каждом $i=1, 2$, $(t_*, x_*^{(i)})$, параметрах $t_1^{(i)}\leqslant t_2^{(i)}\leqslant\cdots\leqslant t_{m-1}^{(i)}$ управления $\eta_{\{k\}}$ $(\eta_k^{(i)}\in H_k^{(i)}(t_{k-1}^{(i)}))$ $(t_0=t_*)$ программное движение системы $\sum_{\{k\}}^{(i)}$ $(i=1, 2)$, порожденное управлением $\eta_{\{k\}}$ из позиции $(t_*^{(i)}, x_*^{(i)})$ для параметров $t_1^{(i)}, \cdots, t_{m-1}^{(i)}$, единственно. Это движение, обозначим через $\Psi_i(\cdot/t_*, t_1^{(i)}, \cdots, t_{m-1}^{(i)}, x_*, \eta_{\{k\}})$.

Верно следующее утверждение.

Лемма 1.1. Для любой последовательности из $H_k^{(i)}(t_*)$ существует его подпоследовательность, слабо сходящаяся к некоторому $\eta\in H_k^{(i)}(t_*)$.

Пусть заданы числа $t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{m-1}$. Через $C_{\{t_k\}}^n[t_*, t^*]$ будем обозначать банахово пространство всех непрерывных функций $g:[t_*, t^*]\to R^n$ с нормой

$$\|g\|_{t_*}^{t^*}=\left\{\left[\max_{t\in[t_*, t^*]}\|g(t)\|^2+\sum_{j=k}^{l}(t_j-t_*)^2\right]^{1/2}\text{ при } t_*\in[t_{k-1}, t_k],\right.$$

$$t^*\in[t_{l-1}, t_l]\ 1\leqslant k\leqslant l\leqslant m-1;\ \left[\max_{t\in[t_*, t^*]}\|g(t)\|^2+\sum_{j=k}^{m-1}(t_j-t_0)^2\right]^{1/2} \quad (1.2)$$

при $t_*\in[t_{k-1}, t_k]$, $t^*\geqslant t_{m-1}$ и $\max\|g(t)\|$ при $t_{m-1}\leqslant t_*\leqslant t^*\}$.

Через $C_{\{t_k\}}^n[t_*, \infty)$ обозначим линейное пространство всех непрерывных функций $g:[t_*, \infty)\to R^n$ с параметрами $t_1, \ldots, t_{m-1}$. Замыканием множества E из $C_{\{t_k\}}^n[t_*, t^*]$ или $C_{\{t_k\}}^n[t_*, \infty)$ обозначим через $\bar{E}$.

Соображениями, приведенными в [2], проверяется справедливость следующих утверждений.

Лемма 1.2. Если последовательность $\{x_j\}\in R^n$ сходится к $x\in R^n$, а последовательность $(\eta_{\{k\}})j$ из $\{H_k(t_{k-1})\}$ слабо—к $\eta_{\{k\}}\in\{H_k(t_{k-1})\}$, то $\Psi_j(\cdot/t_*, t_1, \cdots, t_{m-1}, x_j, \eta_{\{k\}})\to\Psi(\cdot/t_*, t_1, \cdots, t_{m-1}, x, \eta_{\{k\}})$ в $C_{\{t_k\}}^n[t_*, \infty)$.

Лемма 1.3. Для любых $\varepsilon>0$, $t_1, \ldots, t_k$, $t_*\geqslant t_0$, $t^*\in[t_*, \infty)$, $x_*\in R^n$ существует $\delta>0$ такое, что при любых $\eta_{\{k\}}\in\{H_{\{k\}}^{(i)}(t_*)\}$, $t\in[t_*, t^*]$, $x_*\in R^n$, $x\in R^n$, $|t-t_*|\leqslant\delta$, $\|x-x_*\|<\delta$ выполняется $\|\Psi_i(\cdot/t, t_1, \cdots, t_{m-1}, x, \eta_{\{k\}}[t_*, \infty))-\Psi_i(\cdot/t_*, t_1, \ldots, t_{m-1}, x_*, \eta_{\{k\}}\|_{\max(t, t_*)}^{t^*}\leqslant\varepsilon$.

§ 2. Определение игры в классе квазистратегий. Пусть заданы компакты $M_1, \cdots, M_m$ $(m\geqslant 2)$ и N в метрическом пространстве $Z=[t_0, \infty)\times R^n$, а также функция $\sigma:[t_0, \infty)^m\times[1, \infty]^{m-1}\to(-\infty, +\infty]$ со свойствами, приведенными в [3].

Для любого числа c фиксируем $\bar{\omega}(c)\in[t_0, \infty)$ такое, что если $\sigma(\tau_1, \cdots, \tau_m, 1, \cdots, 1)\leqslant c$, то $\tau_1, \cdots, \tau_m\in[t_0, \bar{\omega}(c)]$.

Будем считать, что $\bar{\omega}(c_1)\leqslant\bar{\omega}(c_2)$ при $c_1\leqslant c_2$.

Для каждой непрерывной функции $x:E\to R^n$, где E есть либо $[t_0, \infty)$, либо $[t_*, t^*]$ $(t^*\geqslant t_*\geqslant t_0)$, и каждого набора $t_0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_{m-1}$ определим $T_k(x)$, $\tau_k(x)$, $\eta_k(x)\cdot(k\in I)$ аналогично приведенным в [4, 5] определениям. И плата

$$\gamma(x)=\sigma(\tau_1(x), \cdots, \tau_m(x), \eta_1(x), \cdots, \eta_{m-1}(x)). \qquad (2.1)$$

Функционал $\gamma(x)$ (2.1) является платой в рассматриваемой игре. В этой игре первый игрок, управляющий системами $\sum^{(1)}_{\{k\}}$, стремится минимизировать значение $\gamma(x)$ на движениях систем $\sum^{(1)}_{\{k\}}$; второй игрок, управляющий системами $\sum^{(2)}_{\{k\}}$, стремится максимизировать значение $\gamma(x)$ на движениях систем $\sum^{(2)}_{\{k\}}$.

Соотношения игровых задач для двух различных управляемых систем были получены при решении проблемы унификации дифференциальных игр [2, 3, 6, 7].

Определим наборы программ следующим образом.

Обозначим через $[g_1\perp g_2]^t$ следующую склейку функций g_1 и g_2:

$$[g_1\perp g_2]^t=\begin{cases} g_1(\tau); & \tau<t\\ g_2(\tau); & \tau>t\end{cases} \qquad (t_1\leqslant t_2\leqslant t).$$

Через $g/Д$ обозначим сужение функции g на множество $Д\subset[t_0, \infty)$.

t_*—программой для систем $\sum^{(i)}_{\{k\}}$ и набора $t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{m-1}$ $(t_*\in\in[t_{k-1}, t_k))$ будем называть множество $L^{(i)}_{\{t_k\}}=[L_k^{(i)}$ при $t\in[t_*, t_k)$; $L^{(i)}_{k+1}$ при $t\in[t_k, t_{k+1})$; $\cdots$; $L_m^{(i)}$ при $t\in[t_{m-1}, \infty)]$, где $L_j^{(i)}$—любое непустое подмножество множества $H_j^{(i)}(t_{j-1})$, $j=k+1, \cdots, m$.

Для $\bar{t}_1$—программы $L^{(i)}_{\{t_k\},1}$ и $\bar{t}_2$—программы $L^{(i)}_{\{t_k\},2}$, где $t_0\leqslant\bar{t}_1\leqslant\bar{t}_2$, положим $[L^{(i)}_{\{k\},1}\perp L^{(i)}_{\{t_k\},2}]=\{[\eta_{\{k\},1}\perp\eta_{\{k\},2}]^t:\eta_{\{k\},1}\in L^{(i)}_{\{t_k\},1}, \eta_{\{k\},2}\in L^{(i)}_{\{t_k\},2}\}$;

$$L^{(i)}_{\{t_k\},1}/D=\{\eta_{\{k\}}/D:\eta_{\{k\}}\in L^{(i)}_{\{t_k\},1}\}(D\subset[\bar{t}_1, \infty)).$$

Из указанного семейства множеств выделим семейство $L^{(i)}_{\{t_k\},t}$ множеств такое, что

1) при каждом $t\in[t_0, t_1]$ $L^{(i)}_{\{t_k\},t}$ есть непустое множество t-программ для систем $\sum^{(i)}_{\{k\}}$ и набора $t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{m-1}$;

2) для любых $\bar{t}_1\geqslant t_0$, $\bar{t}_2\geqslant t_0$ $\bar{t}_1$—программы $L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_1}\in L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_1}$; t_2—программы $L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_2}\in L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_2}$; $\bar{t}_1$—программа $[L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_1}\perp L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_2}]^{\bar{t}_2}$ принадлежит множеству $L^{(i)}_{\{t_k\},t_1}$;

3) для любых $\bar{t}_1\geqslant t_0$, $\bar{t}_2\geqslant\bar{t}_1$ и $\bar{t}_1$—программы $L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_1}\in L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_1}$; $\bar{t}_2$—программа $L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_1}/[t_2, \infty]$ принадлежит множеству $L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_2}$;

4) для любых $\bar{t}_1\geqslant t_0$ и $\bar{t}_2\geqslant\bar{t}_1$, $\bar{t}_1$—программы $L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_1}\in L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_1}$ и ее элементов $\eta_{\{k\},1}$ и $\eta_{\{k\},2}$ их склейка $[\eta_{\{k\},1}\perp\eta_{\{k\},2}]^{\bar{t}_2}$ принадлежит $L^{(i)}_{\{t_k\},\bar{t}_1}$

Данное семейство будем называть набором программ для систем $\sum^{(i)}_{\{k\}}$ и параметров $\{t_k\}$.

Всякое непустое подмножество множества $\mu_k^{(i)}$ будем называть ресурсом управления (кратко—ресурсом) для системы $\sum^{(i)}_{\{k\}}$. Разбиением полуоси $[t_*, \infty)$ $(t_* \geqslant t_0)$ будем называть семейство $(\tau_j)_{j=0}^{\infty}$ чисел такое, что $t_* = \tau_0 < \tau_1 < \cdots$; $\inf_{i \in \{0,1,\ldots,\}} (\tau_{i+1} - \tau_i) > 0$. Не нарушая общности, будем предполагать, что при всех разбиениях параметры $t_1, t_2, \cdots, t_{m-1}$ входят в последовательность чисел $\{\tau_i\}$.

Пусть для данного разбиения $\{\tau_i\}$ моменты $t_1, \cdots, t_{m-1}$ имеют номера $s_1, \cdots, s_{m-1}$, тогда через $(\omega_{k,j}^{(i)})_{j=s_{k-1}}^{s_k}$ обозначим семейство ресурсов для системы $\sum_{\{k\}}^{(i)}$, $k=1, \cdots, m$; $s_m = +\infty$. Через $H_k^{(i)}(t_{k-1}/(\omega_{k,j}^{(i)})_{j=s_{k-1}}^{s_k}$ $(\tau_j)_{j=s_{k-1}}^{s_k})$ обозначим множество всех $\eta \in H_k^{(i)}(t_{k-1})$ таких, что $\eta(t) \in \omega_{k,j}^{(i)}$ при всех $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = s_{k-1}, \ldots, s_{k-1}$, $k=1, \ldots, m$, $t_{k-1}/_{k=1} = t_*$; $s_m = +\infty$.

Следуя [2], назовем набором ресурсов для системы $\sum_{\{k\}}^{(i)}$ фиксированное непустое множество ресурсов и обозначим через $\Omega_k^{(i)}$.

Будем говорить, что наборы программ порождены наборами ресурсов, если $L_{\{k\},t_{k-1}}^{(i)}$ из $L_{\{k\},t_*}^{(i)}$ есть множество всех t программ для системы $\sum_{\{k\}}^{(i)}$ вида $H_k^{(i)}(t_{k-1}/(\omega_{k,j}^{(i)})_{j=k-1}^{k}, (\tau_j)_{-k-1}^{k}$, где $\omega_{k,j}^{(i)} \in \Omega_k^{(i)}$, $j = s_{k-1}, \ldots, s_k - 1$, $(\tau_j)_{j=0}^{\infty}$ –разбиение полуоси $[t_*, \infty)$. t_*-квазистратегией для систем $\sum_{\{k\}}^{(i)}$ $(t_* \geqslant t_0)$ будем называть всякое отображение α множества $L_{\{t_k\},t_*}^{(i)}$ во множество всех t_*-программ для систем $\sum_{\{k\}}^{(i)}$ (независимо от параметров $t_1, \cdots, t_{m-1}$), такое, что

1) для каждой t_*-программы $\overline{L} \in L_{\{t_k\},t_*}^{(i)}$, $\alpha(L) \subset \overline{L}$;

2) для любых t_*-программ $L_1, L_2 \in L_{\{t_k\},t_*}^{(i)}$ и $t > t_*$. Из $L_1/[t_*, t] = L_2/[t_*, t]$ следует $\alpha(L_1)/[t_*, t] = \alpha(L_2)/[t_*, t]$.

Множество всех t_*—квазистратегий для систем $\sum_{\{k\}}^{(i)}$ будем обозначать $Q_i(t_*)$.

Введем обозначение $\Psi(t_*, t_1, \cdots, t_m, x_*, L_{\{k\},t_*}^{(i)}) = \{\Psi_i(\cdot/t_*, t_1, \cdots, t_{m-1}, x_*, \eta_{\{k\},t_*}^{(i)}) : \eta_{\{k\},t_*}^{(i)} \in L_{\{k\},t_*}^{(i)}\}$.

Пучком движений систем $\sum_{\{k\}}^{(i)}$ порожденным t_*-квазистратегией $\alpha \in Q_i(t_*)$ из позиции (t_*, x_*), будем называть множество

$$X_i(t_*, x_*, \alpha) = \bigcup_{L_{\{k\},t_*}^{(i)} \in L_{\{k\},t_*}^{(i)}} \psi_i(t_*, t_1, \cdots, t_{m-1}, x_*, \alpha(L_{\{k\},t_*}^{(i)})).$$

$$t_* \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{m-1}.$$

§ 3. Задачи сближения и уклонения в классах квазистратегий. Сближающие и уклоняющие мосты. Оптимальными результатами для систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$ и $\sum_{\{k\}}^{(2)}$ в позиции (t_*, x_*) будем называть соответственно числа

$$\gamma_1^{(0)}(t_*, x_*) = \inf_{\alpha_1 \in Q_1(t_*)} \gamma_1(\alpha_1/t_*, x_*), \tag{3.1}$$

$$\gamma_2^{(0)}(t_*, x_*) = \sup_{\alpha_2 \in Q_2(t_*)} \gamma_2(\alpha_2/t_*, x_*), \tag{3.2}$$

где

$$\gamma_1(\alpha_1/t_*, x_*) = \sup_{x \in \overline{X_1(t_*, x_*, \alpha_1)}} \gamma(x); \quad \gamma_2(\alpha_2/t_*, x_*) = \inf_{x \in X_2(t_*, x_*, \alpha_2)} \gamma(x).$$

t_*—квазистратегии α_1 и α_2, определяемые из условий (3.1) и (3.2), будем называть соответственно оптимальной сближающей для систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$ и уклоняющей для систем $\sum_{\{k\}}^{(2)}$ в позиции (t_*, x_*).

Для каждого числа с t_*-квазистратегии $\alpha_1 \in Q_1(t_*)$ и $\alpha_2 \in Q_2(t_*)$ будем называть соответственно с-сближающей для систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$ и с-уклоняющей для систем $\sum_{\{k\}}^{(2)}$ из позиции (t_*, x_*), если $\gamma_1(\alpha_1/t_*, x_*) \leqslant c$ $(\gamma_2(\alpha_2/t_*, x_*) > c)$, то совокупность всех таких t_*-квазистратегий обозначим через $Q_1(c/t_*, x_*)$ $(Q_2(c/t_*, x_*))$.

с-сближающим t_*-мостом для систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$ $(\bar\omega(c) \geqslant t_* \geqslant t_0,\ c \in R^1)$ будем называть всякое семейство множеств (W_t) $t \in [t_*, \bar\omega(c)]$ такое, что

1) $W_t \subset C^n_{\{t_k\}}[t_*, t]$ $(t \in [t_*, \bar\omega(c)])$;

2) для любых $\bar t_1 \in [t_*, \bar\omega(c)]$, $g \in W_{\bar t_1}$, $\bar t_2 \in [\bar t_1, \bar\omega(c)]$, $L_{\{t_k\}} \in L^{(1)}_{\{t_k\}, \bar t_1}$ существует $\eta_{\{k\}} \in \bar L_{\{t_k\}}$ такое, что

$$[g \perp \psi_1(\cdot/\bar t_1, t_1 \cdots, t_{m-1}, g(\bar t_1), \eta_{\{k\}})]^{\bar t_1} / [\bar t_1, \bar t_2] \in W_{\bar t_2};$$

3) для каждого $g \in W_{\bar\omega(c)}$ $\gamma(g) \leqslant c$;

4) если $\bar t \in [t_*, \bar\omega(c)]$, $\bar t_j \in [\bar t, \bar\omega(c)]$, $\bar t_j \to \bar t$, $g \in W_{\bar\omega(c)}$, $g/[t_*, \bar t_j]$ $(j = 1, 2, \ldots)$, то $g/[t_*, \bar t] \in W_{\bar t}$.

Каждому с-сближающему t_*-мосту $\omega = (W_t)_{t \in [t_*, \bar\omega(c)]}$ и $x_* \in W_{t_*}$ поставим в соответствие функцию α^1_{ω, x_*} из $L^{(1)}_{\{t_k\}, t_*}$ во множество всех подмножеств $\{H_k^{(1)}(t_{k-1})\}(t_{k-1}/_{k=1} = t_*)$ вида: для каждого $L_{\{t_k\}} \in L^{(1)}_{\{t_k\}, t_*}$ α^1_{ω, x_*} есть множество всех $\{\eta_k\} \in \bar L_{\{t_k\}}$ таких, что при всех $t \in [t_*, \bar\omega(c)]$, $\Psi_1(\cdot/t_*, t_1, \cdots, t_{m-1}, x_*, \eta_{\{k\}})/[t_*, t] \in W_t$.

Можно доказать, что для любых с-сближающего t_*-моста $w = (W_t)_{t \in [t_*, \bar\omega(c)]}$, систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$ и $x_* \in W_{t_*}$ функция α^1_{ω, x_*} есть с-сближающая из позиции (t_*, x_*) t_*-квазистратегия для систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$.

Теорема 3.1. Для каждой позиции (t_*, x_*) существует оптимальная t_*-квазистратегия для систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$.

Доказательство. Пусть $c = \gamma_1^0(t_*, x_*)$. Ясно, что $c > -\infty$. Если $c = \infty$, то любая t_*-квазистратегия для систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$ является оптимальной сближающей.

Пусть $c < \infty$ и $c_j \to c_{+0}$, $c_{j+1} < c$;

$$W_{j,t} = \bigcup_{\alpha_1 \in Q_1(c_j/t_*, x_*)} X_1(t_*, x_*/\alpha_1)/[t_*, t],\ (t \in [t_*, \bar\omega(c_j)],\ j = 1, 2, \ldots).$$

$(W_{j,t})_{t \in [t_*, \bar\omega(c_j)]}$ есть c_j-сближающий t_*-мост для систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$, очевидно, $W_{j+1,t} \subset W_{j,t}$ при $t \in [t_*, \bar\omega(c_{j+1})]$. Тогда $w = (\bigcap_{j=1}^{\infty} W_{j,t})_{t \in [t_*, \bar\omega(c_j)]}$ — с-сближающий t_*-мост для систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$ и α^1_{ω, x_*} —с-сближающая из (t_*, x_*) t_*-квазистратегия для систем $\sum_{\{k\}}^{(1)}$.

Теорема доказана.

с-уклоняющим $[t_*, t^*]$-мостом для систем $\sum_{\{k\}}^{(2)}$ $(\bar\omega(c) \geqslant t^* \geqslant t_* \geqslant$

$\geqslant t_0$, $c\in R^1$) будем называть всякое семейство множеств $(W_t)_{t\in[t_*,\bar\omega(c)]}$, такое, что

1) $W_t\subset C^n_{\{t_k\}}[t_*, t]$ $(t\in(t^*, \bar\omega(c)])$;

2) для любых $\bar t_1\in[t^*, \bar\omega(c)]$, $g\in W_{\bar t_1}$, $L_{\{t_k\},2}\in\mathcal{L}^{(2)}_{\{t_k\},\bar t_1}$ существует $\{\eta_k\}\in\bar L_{\{t_k\},2}$ такое, что при всех $t\in[\bar t_1, \bar\omega(c)]-[g\perp\psi_2(\cdot/\bar t_1, t_1, \ldots, t_{m-1}, g(\bar t_1), \{\eta_k\}]^{\bar t_1}/[t_1, t]\in W_t$;

3) $W_{\bar\omega(c)}$ замкнуто и для каждого $g\in W_{\bar\omega(c)}$, $\gamma(g)>c$. Каждому c—уклоняющему $[t_*, t^*]$ мосту $w=(W_t)_{t\in[t_*,\bar\omega(c)]}$ и $x_*\in W_t$ поставим в соответствие функцию α^*_{w,x_*} из $\mathcal{L}^{(2)}_{\{t_k\},t^*}$ во множество всех t^*—программ для систем $\sum^{(2)}_{\{k\}}$ вида: для каждого $L_{\{t_k\},2}\in\mathcal{L}^{(2)}_{\{t_k\},t^*}$ α^*_{w,x_*} есть множество всех $\{\eta_k\}\in\bar L_{\{t_k\},2}$ таких, что при всех $t\in[t^*, \bar\omega(c)]$ $\psi_2(\cdot/t^*, t_1, \ldots, t_{m-1}, x_*, \{\eta_k\}/[t^*, t]\in W_t$.

Справедлива следующая лемма 3.1. Пусть $w=(W_t)_{t\in[t^*,\bar\omega(c)]}$ —c-уклоняющий $[t_*, t^*]$-мост для систем $\sum^{(2)}_{\{k\}}$ и $x_*\in W_{t_*}$. Тогда для каждого $x\in\overline{X_2(t^*, x_*(t^*), \alpha^*_{w,x_*})}$ имеет место неравенство $\gamma([x_*\perp x]^{t_*}/[t_*, \bar\omega(c)])>c$.

§ 4. Соотношения игровых задач при условии согласованности наборов программ и наборов ресурсов. Будем говорить, что выполнено условие согласованности наборов программ, если для любых $(t_*, x_*)\in\in Z$, $t_1<t_2<\cdots<t_{m-1}$, $L_{\{t_k\},1}\in\mathcal{L}^{(1)}_{\{t_k\},t_*}$, $L_{\{t_k\},2}\in\mathcal{L}^{(2)}_{\{t_k\},t_*}$ найдутся $\eta_{(k),1}\in\in\bar L_{\{t_k\},1}$, $\eta_{\{k\},2}\in\bar L_{\{t_k\},2}$ такие, что $\psi_1(\cdot/t_*, t_1, \cdots, t_{m-1}, x_*, \eta_{\{k\},1}=\Psi_2(\cdot/t_*, t_1, \cdots, t_{m-1}, x_*, \eta_{\{k\},2})$.

Лемма 4.1. Пусть выполнено условие согласованности наборов программ. Тогда для любых $(t_*, x_*)\in Z$ и числа c $Q_1(c/t_*, x_*)\cup Q_2(c/t_*, x_*)\neq\Phi$.

Теорема 4.1. Пусть выполнено условие согласованности наборов программ. Тогда для каждой позиции $(t_*, x_*)\in Z$

$$\gamma_1^{(0)}(t_*, x_*)\leqslant\gamma_2^{(0)}(t_*, x_*).$$

Доказательство. Предположим противное: $\gamma_1^{(0)}(t_*, x_*)>c>>\gamma_2^{(0)}(t_*, x_*)$. Тогда $Q_1(c/t_*, x_*)$ и $Q_2(c/t_*, x_*)$ должны быть пустыми, что невозможно по лемме 4.1.

Будем говорить, что выполнено условие экстремальной согласованности наборов ресурсов, если для любых $l\in R^n$, $(t, x)\in Z$, $k\in I$ имеет место

$$\inf_{\omega\in\Omega^{(1)}_k}\ \sup_{\eta\in\omega} l'f^{(1)}_k(t, x, \eta)=\sup_{\omega\in\Omega^{(2)}_k}\ \inf_{\eta\in\omega} l'f^{(2)}_k(t, x, \eta). \qquad (4.1)$$

В случае, если знак = обращается в $\geqslant$ или $\leqslant$, будем говорить, что выполнено условие соответственно максиминной или минимаксной согласованности наборов ресурсов.

Лемма 4.2. Пусть наборы программ порождены наборами ресурсов и выполнено условие максиминной согласованности наборов ресурсов. Тогда выполнено условие согласованности наборов программ.

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*)\in Z$, $t_*<t_1<\cdots<t_{m-1}$, $L_{\{t_k\},1}\in\in\mathcal{L}^{(1)}_{\{t_k\},t_*}$, $L_{\{t_k\},2}\in\mathcal{L}^{(2)}_{\{t_k\},t_*}$. В силу лемм 1.1 и 1.2 достаточно показать,

что для произвольных $t^*>t_*$, $\varepsilon>0$ существуют $\eta_{\{k\},i}\in L_{\{t_k\},1}$, $i=1, 2$ такие, что $\| \psi_1(\cdot/\eta_{\{k\},1})-\Psi_2(\cdot/\eta_{\{k\},2})\|<\varepsilon$ ($\|\cdot\|$—эвклидовая норма). Для этого достаточно проверить (см. лемму 1.1 [2]), что для каждого $\delta>0$ найдутся $\eta_{\{k\},1}\in L^{(1)}_{\{t_k\},t_*}$ и $\eta_{\{k\},2}\in L^{(2)}_{\{t_k\},t_*}$ такие, что при всех $t\in[t_*, t^*]$

$$\lambda(t/\eta_{\{k\},1}, \eta_{\{k\},2}) = \| \psi_1(t/\eta_{\{k\},1})-z_2(t/\eta_{\{k\},1}, \eta_{\{k\},2}) \|^2<\delta, \tag{4.2}$$

где

$$z_2(t/\eta_{\{k\},1}, \eta_{\{k\},2})=x_* + \int_{t_*}^{t_1} f_1^{(2)}(\tau, \psi_1(\tau/\eta_{\{k\},1}), \eta_{1,2}(\tau))d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} f_2^{(2)}(\tau, \Psi_1(\tau/\eta_{\{k\},1}), \eta_{2,2}(\tau))d\tau+\ldots+\int_{t_{l-1}}^{t_*} f_l^{(2)}(\tau, \Psi_1(\tau/\eta_{\{k\},1}), \eta_{l,2}(\tau))d\tau$$

$$(t^*\in[t_{l-1}, t_l)).$$

Не нарушая общности, считаем, что

$$L_{k,i}=H_k^{(i)}(t_{k-1}/(\omega_{k,j}^{(i)})_{j=s_{k-1}}^{s_k}, (\tau_j)_{j=s_{k-1}}^{s_k}), \quad i=1,2;$$

$$k=1, \ldots, m; \ t_{k/k-0}=t_*; \ s_m=+\infty, \text{ где } \omega_{k,j}^{(i)}\in\Omega_k^{(i)}, \ j=s_{k-1},\ldots,s_k-1.$$

Учитывая условие максиминной согласованности наборов ресурсов, можно добиться соотношения (4.2), если при разбиении $(\bar t_j)_{j=0}^{\infty}$ полуоси $[t_*, \infty)$ таком, что $\beta=\sup\{\bar t_{j+1}-\bar t_j;\ j=0, 1 \ldots\}$ достаточно мало $\{\tau_j: j\in\{0, 1, \cdots\}\}\subset\{\bar t_j: j\in\{0, 1, \cdots\}\}$, определяется $\eta_{k,i}$ рекуррентно следующим образом: при $t\in[\bar t_j, \bar t_{j+1})$, $j\in s_{k-1}, \cdots, s_k-1\}$, $\eta_{k,i}(t)=\eta_{k,j}^{(i)}\in\omega_{k,p_j}^{(i)}$ $(i=1, 2)$,

$$l'_{k,j}f_{k,j}^{(1)}(\eta_{k,j}^{(1)})< \inf_{\eta\in\omega_{k,p_j}^{(1)}} l'_{k,j}f_{k,j}^{(1)}(\eta)+\beta; \quad l'_{k,j}f_{k,j}^{(2)}(\eta_{k,j}^{(2)})< \sup_{\eta\in\omega_{k,p_j}^{(2)}} l'_{k,j} f_{k,j}^{(2)}(\eta).$$

Здесь $l_{k,j}=\psi_1(\bar t_j/\eta_{\{k\},1})-z_2(\bar t_j/\eta_{\{k\},1}, \eta_{\{k\},2})$, $f_{k,j}^{(i)}(\eta)=f_k^{(i)}(\bar t_j, \psi_1(\bar t_j/\eta_{\{k\},1}) \eta)$, p_j таково, что $\bar t_j\in[\tau_{p_j}, \tau_{p_j+1})$.

Из леммы 4.2 и теоремы 4.1 вытекает

Теорема 4.2. Пусть наборы программ порождены наборами ресурсов и выполнено условие максиминной (минимаксной) согласованности наборов ресурсов. Тогда для любой позиции (t_*, x_*)

$$\gamma_1^c(t_*, x_*)<\gamma_2^0(t_*, x_*) \quad (\gamma_1^0(t_*, x_*)\geqslant\gamma_2^0(t_*, x_*)).$$

Аналогично лемме 4.2 можно проверить, что если наборы программ порождены наборами ресурсов и выполнено условие согласованности наборов ресурсов, тогда для любых $(t_*, x_*)\in Z$, $\alpha_1\in Q_1(t_*)$, $\alpha_2\in Q_2(t_*)$, $x_1(t_*, x_*, \alpha_1)\cap x_2(t_*, x_*, \alpha_2)\neq\Phi$.

Отсюда и из теоремы 4.2 вытекает следующее утверждение, аналогичное теореме о существовании цены в дифференциальной игре.

Теорема 4.3. Пусть наборы программ порождены наборами ресурсов и выполнено условие экстремальной согласованности наборов ресурсов. Тогда для любой позиции (t_*, x_*), $\gamma_1^0(t_*, x_*)=\gamma_2^0(t_*, x_*)$.

Кафедра механики
Поступила 8.09.1987

ЛИТЕРАТУРА

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977, 614 с.
2. **Кряжимский А. В., Ченцов А. Г.** О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения. Свердловск, 1979, 73 с. Деп. ВИНИТИ, № 1729—80, 1980.
3. **Габриелян М. С., Кряжимский А. В.** Дифференциальная игра сближения-уклонения с m целевыми множествами.—ДАН СССР, т. 288, № 3, с. 525—527.
4. **Габриелян М. С.** Игровые задачи о встрече с m целевыми множествами для систем с переменной динамикой.—Межвуз. сб. науч. трудов: Математика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1985, вып. 5, с. 124—134.
5. **Микаелян О. С.** Альтернативное утверждение для одного случая дифференциальной игры при m целевых множествах.—Межвуз. сб. науч. трудов: Математика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1985, вып. 5, с. 147—157.
6. **Красовский Н. Н.** К задаче унификации дифференциальных игр.—ДАН СССР, 1976, т. 226, № 6, с. 1260—1263.
7. **Красовский Н. Н.** Унификация дифференциальных игр.—Тр. Инст. мат. и мех. УНЦ АН СССР, 1977, вып. 24: Игровые задачи управления, с. 32—45.

Ամփոփում

Դիտարկվում է մոտեցման-շեղման խաղային խնդիրը m նպատակային բազմություններով և քայլ առ քայլ փոփոխվող համակարգերում ծրագրային ղեկավարումների բազմության վրա որոշված քվազիստրատեգիաների դասում։ Լիպշիցի պայմանը փոխարինվում է ընդհանրացված միակության պայմանով, իսկ փոքր խաղում թամբի կետի գոյության պայմանը՝ ռեսուրսների համախմբերի համաձայնեցվածության առավել թույլ պայմանով։ Ապացուցվում է դիֆերենցիալ խաղում խաղի արժեքի գոյության թեորեմը համապատասխան դեպքում։

SUMMARY

An approaching-deviation game task of m aim sets and step by step changing system is considered in the class of quazistrategics. In this case Lepshits's condition is replaced by the condition of existing general singularity and the saddle point existing condition in thee little game is replaced by a weaker condition of resource collection coordination. An affirmation is proved which is analogous to the theorem of the existing game prize in differential games.