ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1988 Естественные науки

Математика

УДК 517.54

Б. А. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЕ ТИПА ТЕЙЛОРА-МАКЛОРЕНА

В статье вводятся в рассмотрение системы операторов $\{L_\rho^{n/\rho}\}_0^\infty$, $\{\tilde{L}_\rho^{n/\rho}\}_0^\infty$ $(0<\rho<1)$ и для функций некоторых классов получена одна обобщенная формула типа Тейлора-Маклорена.

Введение. В совместной работе автора с проф. М. М. Джрбашяном [1], в частности, была определена система функций

$$\varepsilon_n^{(\rho)}(x)\equiv\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon;\beta)}\frac{e^{x\zeta^\rho}\zeta^{\rho-1}d\zeta}{\prod\limits_{j=0}^{n}(\zeta+\lambda_j)},\quad n\geqslant 0,\ x\in(0,+\infty),\tag{1}$$

а также система операторов, ассоциированных с интегро-дифференциальным оператором D^γ Римана-Лиувилля

$$L^{0/\rho}f(x)\equiv f(x),\quad L^{n/\rho}f(x)=\prod_{j=0}^{n-1}(D^{1/\rho}+\lambda_j)f(x),$$

$$\tilde{L}^{n/\rho}f(x)\equiv D^{-\alpha}L^{n/\rho}f(x),\quad (n\geqslant 1),\tag{2}$$

где $\rho\geqslant 1$, $\alpha=1-\dfrac{1}{\rho}$, $\lambda_{j+1}\geqslant\lambda_j\geqslant 0$ $(j\geqslant 0)$, $\gamma(\varepsilon;\beta)$ — контур в плоскости ζ (см. [2], ст. 126).

Отметим (см. [1]), что функции $\varepsilon_n^{(\rho)}(x)\,(n\geqslant 1)$ допускают также представления вида

$$\varepsilon_n^{(\rho)}(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k^{(n)}E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x^{1/\rho};\ 1/\rho)x^{1/\rho-1},\tag{3}$$

где $s_k(s_k\geqslant 1)$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ последовательности $\{\lambda_j\}_0^\infty$, если $\lambda_{j+1}>\lambda_j\geqslant 0$ $(j\geqslant 0)$, то $s_k=1$.

В работе [1] для функций надлежащих классов была установлена следующая обобщенная формула типа Тейлора-Маклорена:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\tilde{L}^{k/\rho}f(0)\varepsilon_k^{(\rho)}(x)+\int\limits_0^x\varepsilon_n^{(\rho)}(x-t)L^{(n+1)/\rho}f(t)dt\tag{4}$$

в предположении, что $\rho\geqslant 1$.

В этой статье рассматривается следующая задача: верна ли формула (4) при любом фиксированном $\rho (0<\rho<1)$?

В работе вводятся в рассмотрение системы операторов $\{L_p^{n/\rho}\}_0^\infty$, $\{\tilde{L}_p^{n/\rho}\}_0^\infty$ для $0<\rho<1$ и доказывается, что в надлежащих классах функций формула (4) остается справедливой и для значений $0<\rho<1$.

§ 1. Предварительные сведения и леммы

Пусть $\rho(0<\rho<1)$—некоторое фиксированное число, тогда существует **целое число $p (p>1)$ такое, что**

$$\frac{1}{p+1}<\rho<\frac{1}{p}. \tag{1.1}$$

Вводим следующие операторы:

$$D_p^{1/\rho}f(x)=\frac{d}{dx}D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}f(x),\quad D_p^{n/\rho}f(x)=D_p^{1/\rho}(D_p^{(n-1)/\rho}f(x)\quad (n\geqslant 2),$$

$$L_p^{0/\rho}f(x)\equiv f(x),\quad L_p^{n/\rho}f(x)=\prod_{j=0}^{n-1}(D_p^{1/\rho}+\lambda_j)f(x)\quad (n\geqslant 1),$$

$$\tilde{L}_p^{n/\rho}f(x)=D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}L_p^{n/\rho}f(x)\quad (n\geqslant 0), \tag{1.2}$$

где $\lambda_{j+1}>\lambda_j\geqslant 0\ (j\geqslant 0)$, $D^{-\gamma}$—интегральный оператор Римана-Лиувилля.

Рассмотрим систему функций

$$\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k^{(n)}E_\rho\left(-\lambda_k x^{1/\rho},\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1},\quad n\geqslant 0,\quad x\in[0,+\infty), \tag{1.3}$$

где

$$c_0^{(0)}=1,\quad c_k^{(n)}=\{\prod_{\substack{j=0\\(j\neq k)}}^{n}(\lambda_j-\lambda_k)\}^{-1},\quad \lambda_{j+1}>\lambda_j\geqslant 0\ (j\geqslant 0).$$

Лемма 1.1. Пусть $\rho\in(0,1)$ и λ—произвольный параметр. Тогда **в классе функций $y(x)\in L(0,l), D_p^{1/\rho}y(x)\in L(0,l)$ задача типа Коши**

$$D_p^{1/\rho}y+\lambda y=0, \tag{1.4}$$

$$D^k y|_{x=0}=0,\quad (k=0,1,2,\ldots,p-1), \tag{1.5}$$

$$D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}y(x)|_{x=0}=0. \tag{1.6}$$

имеет единственное решение $y(x,\lambda)\equiv 0$.

Доказательство. Очевидно, что функция $y(x,\lambda)\equiv 0$ является решением задачи (1.4)—(1.6), надо убедиться в том, что это решение единственно. Предположим, что функция $\tilde{y}(x,\lambda)$ является решением задачи и $\tilde{y}(x,\lambda)\neq 0$, **тогда, имея в виду определения оператора** $D_p^{1/\rho}$ из (1.4), имеем

$$\frac{d}{dx}D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}\tilde{y}(x,\lambda)=-\lambda\tilde{y}(x,\lambda),$$

откуда, пользуясь условием (1.6), получим

$$D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}\tilde{y}(x,\lambda)=-\lambda\int_0^x\tilde{y}(\tau,\lambda)d\tau=-\lambda D^{-1}\tilde{y}(x,\lambda). \tag{1.7}$$

Поскольку $0<p+1-\frac{1}{\rho}<1$, то, пользуясь хорошо известным свойством дробных интегралов и производных (см. [2], гл. IX), из (1.7) получим

$$\frac{d^p}{dx^p}\tilde{y}(x,\lambda)=-\lambda D^{\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\{D^{-1}\tilde{y}(x,\lambda)\}=$$

$$=-\lambda D^{-\left(\frac{1}{\rho}-p\right)}\tilde{y}(x,\lambda).$$

Откуда имеем

$$\tilde{y}(x,\lambda)=-\lambda D^{-p}D^{-\left(\frac{1}{\rho}-p\right)}\tilde{y}(x,\lambda)=-\lambda D^{-1/\rho}\tilde{y}(x,\lambda). \tag{1.8}$$

Легко видеть, что согласно (1.8) будем иметь

$$\tilde{y}(x,\lambda)=(-\lambda)^nD^{-n/\rho}\tilde{y}(x,\lambda)=$$

$$=\frac{(-\lambda)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right)}\int_0^x(x-t)^{n/\rho-1}\tilde{y}(t,\lambda)dt,\ x\in[0,l). \tag{1.9}$$

Из (1.9) получим оценки

$$\max_{0<x<l}|\tilde{y}(x,\lambda)|\leqslant\frac{l^{-1}\left(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right)}\int_0^l|\tilde{y}(t,\lambda)|\,dt,\ n\geqslant1. \tag{1.10}$$

Поскольку $\tilde{y}(x,\lambda)\in L(0,l)$, то из (1.10) при $n\to+\infty$ получим, что $\tilde{y}(x,\lambda)\equiv0$, $x\in(0,l)$.

Лемма 1.2. Пусть $\rho\in(0,1)$ и λ—произвольный параметр. Тогда в классе функций $y(x)\in L(0,l)$, $D_p^{1/\rho}y(x)\in L(0,l)$ $(0<l<+\infty)$ задача типа Коши

$$D_p^{1/\rho}y+\lambda y=0, \tag{1.11}$$

$$D^jy(x)|_{x=0}=0,\ (j=0,1,\ldots,p-1) \tag{1.12}$$

$$D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}y(x)|_{x=0}=1 \tag{1.13}$$

имеет единствeное решение

$$y(x,\lambda)=E_\rho\left(-\lambda x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что функция $y(x,\lambda)$ является решением задачи (1.11)—(1.13). С этой целью заметим, что для любого $j\,(1\leqslant j\leqslant p)$ имеет место равенство

$$\frac{d^j}{dx^j}\left\{E_\rho\left(-\lambda x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}\right\}=\frac{d^j}{dx^j}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k x^{\frac{k+1}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}\right\}= \tag{1.14}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k x^{\frac{k+1}{\rho}-j-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+\frac{1}{\rho}-j\right)}=E_\rho\left(-\lambda x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}-j\right)x^{\frac{1}{\rho}-j-1},\quad x\in(0,\ l).$$

Если $1\leqslant j\leqslant p-1$, то из (1.14) следует, что функция $y(x,\lambda)$ удовлетворяет условию (1.12). Пользуясь известной формулой (см. [2], гл. III, (1.16)), из (1.14) при $j=p$ получим

$$D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}\left\{E_\rho\left(-\lambda x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}\right\}=E_\rho(-\lambda x^{1/\rho},\ 1). \tag{1.15}$$

Из равенства (1.15) следует, что функция $y(x,\lambda)$ удовлетворяет условию (1.13).

С другой стороны, согласно определению оператора $D_p^{1/\rho}$, пользуясь формулой (1.15), будем иметь

$$D_p^{1/\rho}y(x,\lambda)\equiv\frac{d}{dx}D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}y(x,\lambda)=$$

$$=\frac{d}{dx}\{E_\rho(-\lambda x^{1/\rho};1)\}=\frac{d}{dx}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k x^{k/\rho}}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+1\right)}\right\}= \tag{1.16}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k x^{k/\rho-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}\right)}=-\lambda E_\rho\left(-\lambda x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1},$$

т. е. $D_p^{1/\rho}y(x,\lambda)+\lambda y(x,\lambda)=0$.

Итак, функция $y(x,\lambda)$ является решением задачи (1.11)—(1.13).

Притом оно единственное. Если имеется и другое решение $\tilde{y}(x,\lambda)$, (x,λ), то очевидно, функция $y^*(x,\lambda)\equiv y(x,\lambda)-\tilde{y}(x,\lambda)$, будет решением задачи (1.4)—(1.6), и, следовательно, $y^*(x,\lambda)\equiv 0$, т. е. $y(x,\lambda)\equiv$ $\equiv\tilde{y}(x,\lambda)$.

Легко заметить, что $y(x,\lambda)\in L(0,\ l)$ и согласно (1.16)

$$D_p^{1/\rho}y(x,\lambda)\in L(0,\ l)\quad(0<l<+\infty).$$

Лемма 1.3. Пусть $\varphi(x)\in L(0,\ l)$ и λ—произвольный параметр.

Тогда в классе функций $y(x)\in L(0, l), D_\rho^{1/\rho}y(x)\in L(0, l)$ задача типа Коши

$$D_\rho^{1/\rho}y+\lambda y=\varphi(x), \tag{1.17}$$

$$D^j y(x)|_{x=0}=0 \quad (j=0, 1, 2, \dots, p-1), \tag{1.18}$$

$$D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}y(x)|_{x=0}=0 \tag{1.19}$$

имеет единственное решение $y(x, \lambda)$, представимое в виде

$$y(x, \lambda)=\int_0^x E_\rho\left[-\lambda(x-t)^{1/\rho}, \frac{1}{\rho}\right)(x-t)^{1/\rho-1}\varphi(t)dt. \tag{1.20}$$

Доказательство. Из (1.20) следует оценка

$$|y(x, \lambda)|\leqslant E_\rho\left(l^{1/\rho}|\lambda|, \frac{1}{\rho}\right)l^{1/\rho-1}\int_0^l|\varphi(t)|dt, \quad x\in(0, l),$$

и поэтому $y(x, \lambda)\in L(0, l)$, $(0<l<+\infty)$.

Из (1.14) имеем

$$\frac{d^j}{dx^j}\left\{E_\rho\left[-\lambda(x-t)^{1/\rho}, \frac{1}{\rho}\right](x-t)^{1/\rho-1}\right.$$

$$=E_\rho\left|-\lambda(x-t)^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}-j\right|(x-t)^{1/\rho-j-1}, \quad 1\leqslant j\leqslant p, \; x\in(0, l).$$

С другой стороны, заметим, что при $1\leqslant j\leqslant p-1$

$$E_\rho\left[-\lambda(x-t)^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}-j\right](x-t)^{1/\rho-j-1}|_{t=x}=0,$$

будем иметь

$$\frac{d^j}{dx^j}y(x, \lambda)=\frac{d^j}{dx^j}\left(\int_0^x E_\rho\left[-\lambda(x-t)^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right](x-t)^{1/\rho-1}\varphi(t)dt\right)=$$

$$=\int_0^x E_\rho\left[-\lambda(x-t)^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}-j\right](x-t)^{\frac{1}{\rho}-j-1}\varphi(t)dt, \quad 1\leqslant j\leqslant p. \tag{1.21}$$

Из (1.21) получим следующие оценки:

$$\left|\frac{d^j}{dx^j}y(x, \lambda)\right|\leqslant E_\rho\left(l^{1/\rho}|\lambda|; \frac{1}{\rho}-j\right)x^{\frac{1}{\rho}-j-1}\int_0^x|\varphi(t)|dt, \tag{1.22}$$

$$0\leqslant j\leqslant p-1, \quad x\in(0, l),$$

$$\left|\frac{d^p}{dx^p}y(x, \lambda)\right|\leqslant E_\rho\left(l^{1/\rho}|\lambda|; \frac{1}{\rho}-p\right)\int_0^x(x-t)^{\frac{1}{\rho}-p-1}|\varphi(t)|dt. \tag{1.23}$$

Из неравенства (1.22) следует, что функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет условию (1.18). Заметим, что в силу (1.23) $\frac{d^p}{dx^p}y(x, \lambda) \in L(0, l)$, и поэтому дробный интеграл

$$D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}y(x, \lambda) \equiv \tag{1.24}$$

$$\equiv \frac{1}{\Gamma\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\int_0^x (x-t)^{p-1/\rho}\frac{d^p}{dt^p}y(t, \lambda)dt$$

существует почти всюду на $(0, l)$ и принадлежит классу $L(0, l)$ (см. [2], гл. IX). Подставляя под знак интеграла в (1.24) значение функции $\frac{d^p}{dt^p}y(t, \lambda)$, которое можно получить из (1.21) при $j=p$, и поменяв порядок интегрирования, что законно по теореме Фубини, находим

$$D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}y(x, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\int_0^x \varphi(\tau)d\tau\int_0^{x-\tau}[(x+\tau)-\nu]^{p-1/\rho}E_\rho\left(-\lambda\nu^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}-p\right)\nu^{1/\rho-p-1}d\nu.$$

Но поскольку согласно известной формуле (см. [2], гл. III, (1.16))

$$\frac{1}{\Gamma\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\int_0^{x-\tau}[(x+\tau)-\nu]^{p-1/\rho}E_\rho\left(-\lambda\nu^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}-p\right)\nu^{1/\rho-p-1}d\nu =$$

$$= E_\rho[-\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\ 1],$$

то

$$D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}y(x, \lambda) = \int_0^x \varphi(\tau)E_\rho[-\lambda(x-\tau)^{1/\rho},\ 1]d\tau. \tag{1.25}$$

Из равенства (1.25), в частности, следует условие (1.19). Дифференцируя обе части равенства (1.25) по x, получим

$$D_\rho^{1/\rho}y(x, \lambda) \equiv \frac{d}{dx}D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}y(x, \lambda) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \varphi(\tau)E_\rho[-\lambda(x-\tau)^{1/\rho},\ 1]d\tau\right) =$$

$$= \varphi(x) + \int_0^x \varphi(\tau)\frac{d}{dx}\{E_\rho[-\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\ 1]\}d\tau =$$

$$=\varphi(x)-\lambda\int_0^x E_\rho\left[-\lambda(x-\tau)^{1/\rho},\ \frac{1}{\rho}\right](x-\tau)^{1/\rho-1}\varphi(\tau)d\tau,$$

т. е.

$$D_\rho^{1/\rho}y(x,\ \lambda)+\lambda y(x,\ \lambda)\equiv\varphi(x),$$

отсюда, в частности, следует $D_\rho^{1/\rho}y(x,\lambda)\in L(0,\ l)$.

Легко заметить, что решение $y(x,\ \lambda)$ единственно. В самом деле, **если предположим, что задача (1.17)—(1.19) имеет другое решение** $\tilde{y}(x,\ \lambda)$, то функция $y^*(x,\ \lambda)\equiv y(x,\ \lambda)-\tilde{y}(x,\ \lambda)$ будет решением задачи (1.4)—(1.6) и, **следовательно, согласно лемме (1.1)** $y^*(x,\ \lambda)\equiv 0$, т. е. $\tilde{y}(x,\ \lambda)\equiv y(x,\ \lambda)$.

Лемма 1.4. 1°. Для любого $n\geq 0$ справедливы соотношения

$$L_\rho^{k/\rho}\{\varepsilon_{\rho,n}^{(\rho)}(x)\}=\tilde{L}_\rho^{k/\rho}\{\varepsilon_{\rho,n}^{(\rho)}(x)\}\equiv 0,\ k\geq n+1,\ x\in[0,\ l), \tag{1.26}$$

$$\tilde{L}_\rho^{n/\rho}\{\varepsilon_{\rho,n}^{(\rho)}(x)\}=E_\rho(-\lambda_n x^{1/\rho},\ 1),\ x\in[0,\ l). \tag{1.27}$$

2°. При $0\leq k\leq n-1$

$$\tilde{L}_\rho^{k/\rho}\{\varepsilon_{\rho,n}^{(\rho)}(x)\}|_{x=n}=0. \tag{1.28}$$

Доказательство. Ввиду определения оператора $L_\rho^{k/\rho}$ и функции $\varepsilon_{\rho,n}^{(\rho)}(x)$ имеем

$$L_\rho^{k/\rho}\{\varepsilon_{\rho,n}^{(\rho)}(x)\}=\sum_{i=0}^{n}c_i^{(n)}L_\rho^{k/\rho}\left\{E_\rho\left(-\lambda_i x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}\right\}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}c_i^{(n)}\prod_{j=0}^{k-1}(D_\rho^{1/\rho}+\lambda_j)\left\{E_\rho\left(-\lambda_i x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}\right\}. \tag{1.29}$$

Если учесть, что согласно лемме 1.2

$$(D_\rho^{1/\rho}+\lambda)\left\{E_\rho\left(-\lambda x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}\right\}=0,$$

то легко заметить

$$(D_\rho^{1/\rho}+\lambda_j)\left\{E_\rho\left(-\lambda_i x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}\right\}=$$

$$=(\lambda_j-\lambda_i)E_\rho\left(-\lambda_i x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1},\ x\in[0,\ +\infty). \tag{1.30}$$

Из равенства (1.29) согласно (1.30) получим

$$L_\rho^{k/\rho}\{\varepsilon_{\rho,n}^{(\rho)}(x)\}=\sum_{i=0}^{n}c_i^{(n)}\prod_{j=0}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_i)E_\rho\left(-\lambda_i x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}. \tag{1.31}$$

Поскольку при $k\geq n+1$ все коэффициенты $\prod_{j=0}^{k-1}$ **$(\lambda_j-\lambda_i)=0$, то из (1.31)** следует, что

$$L_p^{k/\rho}\{\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x)\}\equiv 0,\ x\in[0,\ +\infty),$$

и, следовательно,

$$\tilde{L}_p^{\ k/\rho}\{\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x)\}\equiv 0.$$

Из равенства (1.31), пользуясь формулой (1.15) и учитывая определение оператора $\tilde{L}_p^{k/\rho}$, находим

$$\tilde{L}_p^{k/\rho}\{\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x)\}=\sum_{i=0}^{n} c_i^{(n)}\prod_{j=0}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_i)E_\rho(-\lambda_i x^{1/\rho};\ 1),\ x\in[0,\ +\infty). \tag{1.32}$$

Из (1.32) следуют равенства

$$\tilde{L}_p^{n/\rho}\{\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x)\}=E_\rho(-\lambda_n x^{1/\rho},\ 1),\ x\in[0,\ +\infty), \tag{1.33}$$

$$\tilde{L}_p^{k/\rho}\{\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x)\}|_{x=0}=\sum_{i=0}^{n} c_i^{(n)}\prod_{j=0}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_i).$$

Но поскольку $c_i^{(n)}=\left\{\prod_{\substack{j=0\\(j\neq i)}}^{n}(\lambda_j-\lambda_i)\right\}^{-1}$, то из (1.33) при $0\leqslant k\leqslant n-1$ получим

$$\tilde{L}_p^{k/\rho}\{\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x)\}|_{x=0}=\sum_{i=k}^{n}\prod_{\substack{j=k\\(j\neq i)}}^{n}(\lambda_j-\lambda_i). \tag{1.34}$$

Правая часть (1.34) является суммой вычетов функции $\varphi(\zeta)=\left(\prod_{j=k}^{n}(\zeta+\lambda_j)\right)^{-1}$ и, следовательно, равна нулю, т. е.

$$\tilde{L}_p^{k/\rho}\{\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x)\}|_{x=0}=0,\ 0\leqslant k\leqslant n-1,$$

Лемма доказана.

Лемма 1.5. Для любого $n\geqslant 0$ в сумме вида

$$Q_{p,n}^{(\rho)}(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\varepsilon_{p,k}^{(\rho)}(x),\ x\in[0,\ +\infty), \tag{1.35}$$

коэффициенты $\{a_k\}_0^n$ могут быть определены по формулам

$$a_k=\{\tilde{L}_p^{k/\rho}Q_{p,n}^{(\rho)}(x)\}(0),\ (k=0,\ 1,\ \dots,\ n). \tag{1.36}$$

Доказательство очевидно.

§ 2. Формула типа Тейлора-Маклорена

Обозначим через $C_{p,n+1}^{(\rho)}[0,\ l]\,(0<l<+\infty)$ множество функций $f(x)$, **подчиненных следующим условиям:**

1) функции

$$\tilde{L}_p^{k/\rho}f(x)\equiv D^{-\left(p+1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d^p}{dx^p}\{L_p^{k/\rho}f(x)\}\quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

непрерывны на $[0,\ l]$;

2) для любого $j\,(0\leqslant j\leqslant n)$ имеют место равенства

$$D^k\{L_p^{j/\rho}f(x)\}|_{x=0}=0\quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1);$$

3) функция $L_p^{(n+1)/\rho}f(x)$ **непрерывна на $(0,\ l)$ и принадлежит классу** $L(0,\ l)$.

Легко заметить, что каждая функция $y(x,\ \lambda)=E_\rho\left(-\lambda x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}$ и полином вида $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\varepsilon_{p,k}^{(\rho)}(x)$ принадлежит классу $C_{p,n+1}^{(\rho)}[0,\ l]$.

Приведем две леммы, доказательства которых при $\rho\geqslant 1$ приведены в работе [1], эти леммы верны также при $\rho\in(0,\ 1)$.

Лемма 2.1. Для любого $n\geqslant 1$ справедлива формула

$$\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x)=\int\limits_0^x e_\rho(x-t_1,\ \lambda_0)\,dt_1\int\limits_0^{t_1}e_\rho(t_1-t_2,\ \lambda_1)dt_2\ \ldots \tag{2.1}$$

$$\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}}e_\rho(t_{n-1}-t_n,\ \lambda_{n-1})e_\rho(t_n,\ \lambda_n)dt_n,$$

где

$$e_\rho(x,\ \lambda)\equiv E_\rho\left(-\lambda x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}.$$

Лемма 2.2. Пусть функция $\varphi(\tau)\in L(0,\ l)$ непрерывна на интервале $(0,\ l)\ (0<l<+\infty)$.

Тогда для любого $n\geqslant 1$ справедлива формула

$$\int\limits_0^x e_\rho(x-t_1,\ \lambda_0)dt_1\int\limits_0^{t_1}e_\rho(t_1-t_2,\ \lambda_1)dt_2\ldots\int\limits_0^{t_n}e_\rho(t_n-t_{n+1},\ \lambda_n)\varphi(t_{n+1})dt_{n+1}=$$

$$=\int\limits_0^x\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x-\tau)\varphi(\tau)d\tau,\quad x\in(0,\ l). \tag{2.2}$$

Доказательства лемм (2.1)—(2.2) не приводим, поскольку они доказываются тем же способом, что при $\rho\geqslant 1$ (см. [1], леммы 2.6—4.1).

Теорема. Если $f(x)\in C_{p,n+1}^{(\rho)}$ **$[0,\ l]$, то при любом $n\geqslant 0$ справедлива** формула

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(\tilde{L}_p^{k/\rho}f)(0)\varepsilon_{p,k}^{(\rho)}(x)+R_{p,n}(x;\ f),\quad x\in[0,\ l], \tag{2.3}$$

где

$$R_{p,n}(x,\ f)=\int\limits_0^x\varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x-\tau)L_p^{(n+1)/\rho}\{f(\tau)\}d\tau,\quad x\in[0,\ l]. \tag{2.4}$$

Доказательство. Обозначив

$$Q^{(\rho)}_{p,n}(x;\ f)=\sum_{k=0}^{n}(\tilde{L}_p^{k/\rho}f)(0)\varepsilon^{(\rho)}_{p,k}(x), \tag{2.5}$$

$$R_{p,n}(x,\ f)=f(x)-Q^{(\rho)}_{p,n}(x;\ f), \tag{2.6}$$

заметим, что функции $Q^{(\rho)}_{p,n}(x;\ f)$, $R_{p,n}(x;\ f)$ принадлежат классу $C^{(\rho)}_{p,n+1}[0,\ l]$ и при любом $k(0\leqslant k\leqslant n)$ имеют место равенства

$$\tilde{L}_p^{k/\rho}Q^{(\rho)}_{p,n}(x;\ f)|_{x=0}=\tilde{L}_p^{k/\rho}f(x)|_{x=0}=(\tilde{L}_p^{k/\rho}f)(0), \tag{2.7}$$

$$\tilde{L}_p^{k/\rho}R_{p,n}(x,\ f)_{x=0}=0, \tag{2.8}$$

$$\frac{d^j}{dx^j}\{L_p^{k/\rho}R_{p,n}(x;\ f)\}|_{x=0}=0,\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1). \tag{2.9}$$

Из равенства (2.6), пользуясь леммой 1.4, получим

$$L_p^{(n+1)/\rho}\{R_{p,n}(x,\ f)\}=L_p^{(n+1)/\rho}f(x),\ x\in[0,\ l]. \tag{2.10}$$

Согласно определению оператора $L_p^{(n+1)/\rho}$ уравнение (2.10) можно записать в виде

$$(D_p^{1/\rho}+\lambda_n)\{L_p^{n/\rho}R_{p,n}(x;\ f)=\varphi(x),\ x\in[0,\ l], \tag{2.11}$$

где $\varphi(x)=L_p^{(n+1)/\rho}f(x)$.

Заметим, что функция $L_p^{k/\rho}R_{p,n}(x;\ f)\in L(0,\ l)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n+1)$ и поскольку

$$D_p^{1/\rho}L_p^{k/\rho}R_{p,n}(x,\ f)=L_p^{(k+1)/\rho}R_{p,n}(x;\ f)-\lambda_k L_p^{k/\rho}R_{p,n}(x;\ f),$$

то

$$D_p^{1/\rho}L_p^{k/\rho}R_{p,n}(x;\ f)\in L(0,\ l),\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Из (2.11) с учетом (2.8)—(2.9) при $k=n$, согласно лемме 1.3, функция $L_p^{n/\rho}R_{p,n}(x;\ f)$ определяется единственным образом при помощи интегральной формулы

$$L_p^{n/\rho}R_{p,n}(x;\ f)=\int_0^x e_\rho(x-t_{n+1},\ \lambda_n)\varphi(t_{n+1})dt_{n+1}. \tag{2.12}$$

Далее рассмотрим уравнение

$$(D_p^{1/\rho}+\lambda_{n-1})\{L_p^{(n-1)/\rho}R_{p,n}(x;\ f)\}=$$
$$=\int_0^x e_\rho(x-t_{n+1},\ \lambda_n)\varphi(t_{n+1})dt_{n+1} \tag{2.13}$$

и воспользуемся условиями (2.8)—(2.9) для $k=n-1$.

Тогда в силу леммы 1.3 получим представление единственного решения этой задачи

$$L_p^{(n-1)/\rho}R_{p,n}(x;\ f)=$$

$$=\int_0^x e_\rho(x-t_n,\ \lambda_{n-1})dt_n\int_0^{t_n} e_\rho(t_n-t_{n+1},\ \lambda_n)\varphi(t_{n+1})dt_{n+1}. \qquad (2.14)$$

Легко видеть, что, повторяя наши рассуждения, после n-ого шага, мы приходим к тождеству

$$R_{p,n}(x;\ f)=\int_0^x e_\rho(x-t_1;\ \lambda_0)dt_1\int_0^{t_1} e_\rho(t_1-t_2;\ \lambda_1)dt_2\dots$$

$$\times\int_0^{t_{n-1}} e_\rho(t_{n-1}-t_n,\ \lambda_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_n} e_\rho(t_n-t_{n+1},\ \lambda_n)\varphi(t_{n+1})dt_{n+1}=$$

$$=\int_0^x \varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x-\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

т. е.

$$R_{p,n}(x;f)\equiv\int_0^x \varepsilon_{p,n}^{(\rho)}(x-\tau)L_p^{(n+1)/\rho}\{f(\tau)\}d\tau.$$

Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность проф. М. М. Джрбашяну за постановку задачи и полезное обсуждение работы.

Кафедра высшей математики *Поступила 21.06.1988*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Джрбашян М. М., Саакян Б. А.** Классы формулы и разложения типа Тейлора-Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка.—Изв. АН СССР, серия матем., 1975, т. 39, с. 69—122.
2. **Джрбашян М. М.** Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области. М.: Наука, 1966.
3. **Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.** Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка.—Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1968, т. 3, № 1, с. 3—29.
4. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения. Минск: Наука и техника, 1987.

Ամփոփում

Այս հոդվածում որոշ դասի ֆունկցիաների համար ստացված է Թեյլոր-Մակլորենի բանաձևի տիպի մի ընդհանրացված բանաձև, որը հանդիսանում է պրոֆեսոր Մ. Մ. Ջրբաշյանի և հեղինակի համատեղ [1] աշխատանքում ստացված մի արդյունքի անալոգը կամայական $p\in(0,1)$*-ի դեպքում։*

SUMMARY

In the article a Tailor-Macloren type generalized formula has been obtained, which is the analogue for $\rho\in(0,1)$ according to Prof. M. M. Djerbashian's and the author's joint research [1].