ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1985 Естественные науки

Математика

УДК 515.146.39

А. А. ОГНИКЯН

КОЛЬЦА КОГОМОЛОГИЙ ПО МОДУЛЮ 2 НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ ТОМА

В [1] было введено понятие a-оснащенного бордизма, где a—символ Шуберта. Задача вычисления групп стабильно a-бордантных замкнутых a-оснащенных подмногообразий евклидовых пространств сводится к задаче вычисления стабильных гомотопических групп некоторых пространств Тома. В настоящей работе изучаются кольца когомологий по модулю 2 этих пространств. В качестве применения в одном случае дается описание соответствующей градуированной группы когомологий как модуля над алгеброй Стинрода A_2.

Пусть $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n; k)$—символ Шуберта [1], т. е. последовательность целых чисел, удовлетворяющих условию $1\leqslant a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant n+k$, $k\geqslant 0$. Будем рассматривать a как монотонно возрастающую функцию целочисленного аргумента $i=1, 2, \ldots, n$, определенную формулой $a(i)=a_i$. Размерностью функции a назовем число $\Delta(a)=\sum_{i=1}^{n}(a(i)-i)$. Значение аргумента i называется местом скачка функции a, если $a(i)>a(i-1)+1$, а также если $i=1$ и $a(1)>1$. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_s$ —все места скачков, расположенные в порядке возрастания. Функция a однозначно определяется набором чисел и условий

$$1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_s\leqslant n,\quad 1<a(i_1)<a(i_2)<\ldots<a(i_s)\leqslant n+k. \qquad (1)$$

Определим двойственный символ $a^*=(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_k^*; n)$. Обозначим через j_t место t-того скачка функции a^* и положим

$$j_t=k-a(i_{s-t+1})+i_{s-t+1},\quad a^*(j_t)=n+k-a(i_{s-t+1})+2;\quad t=1, 2,\ldots, s.$$

Легко проверяется выполнимость условий (1) для a^*. Заметим, что $(a^*)^*=a$.

В евклидовом пространстве R^{n+k} рассмотрим ортонормальный базис $e_1, e_2, \ldots, e_{n+k}$ и флаг R_{n+k} $(R^1\subset R^2\subset\ldots\subset R^{n+k-1})$, где подпространства R^i порождаются векторами $e_1, e_2, \ldots, e_{n+k}$. Возникает двойственный флаг $\overline{R}_{n+k}=(\overline{R^1}\subset\overline{R^2}\subset\ldots\subset\overline{R^{n+k-1}})$, где $\overline{R^i}=(R^{n+k-1})^\perp$—ортогональное дополнение к R^{n+k-1} в R^{n+k}. Через $G_{n,k}$ обозначим многообразие Грассмана n-мерных подпространств пространства R^{n+k}, и пусть $e(a)$, $\overline{e}(a^*)$ обозначают клетки Шуберта комплексов $G_{n,k}$ и $G_{k,n}$, определяемые символами a и a^* относительно флагов R_{n+k} и $\overline{R}_{n+k}$ соответственно. В R^{n+k+1} рассмотрим подпространство $\tilde{R}^{n+k}$, порожденное векторами

$e_2, e_3, \ldots, e_{n+k+1}$. Пусть стандартные вложения $i_{n,k}: G_{n,k} \to G_{n,k+1}$, $j_{n,k}: G_{n,k} \to G_{n,k+1}$ индуцированы каноническими вложениями

$R^{n+k} \subset R^{n+k+1}$, $\bar{R}^{n+k} \subset R^{n+k+1}$, т. е. $i_{n,k}(V)=V$, $j_{n,k}(V)=R^1 \oplus V$, $V \in G_{n,k}$.

Тогда $\qquad i_{n,k}(e(a))=e(F(a))$, $j_{n,k}(e(a))=e(E(a))$,

где $\qquad F(a)=(a_1, a_2, \ldots, a_n; k+1)$, $E(a)=(1, a_1+1, a_2+1, \ldots, a_n+1; K)$

и все клетки рассматриваются относительно R_{n+k}. Операторы F и E, очевидно, коммутируют между собой. Символы a и b будем называть эквивалентными, если $E^{s_1} \circ F^{t_1}(a)=E^{s_2} \circ F^{t_2}(b)$ для некоторых целых неотрицательных чисел s_1, t_1, s_2, t_2. Тем самым всякий символ Шуберта эквивалентен такому символу a, для которого $k=n$.

Рассмотрим инволюцию $T_n: C_{n,n} \to G_{n,n}$, $T_n(V)=V^{\perp}$, $V \in G_{n,n}$. Известно [2], что $T_n(e(a))$ есть клетка Шуберта относительно $\bar{R}_{2n}$. Пусть $V_a \subset R^{2n}$ —подпространство, порожденное векторами $e_{a(1)}, e_{a(2)}, \ldots, e_{a(n)}$. Тогда $V_a \in e(a), T_n(V_a) \in \bar{e}(a^*)$ и, следовательно, $T_n(e(a))=\bar{e}(a^*)$.

Для удобства впредь через $e(a)$ будем также обозначать как цикл по модулю 2, определяемый клеткой $e(a)$, так и класс гомологий этого цикла. Согласно [2] класс гомологий $e(a) \in H_{\Delta(a)}(G_{n,n}; Z_2)$ не зависит от рассматриваемого флага. Поэтому $T_{n*}(e(a))=e(a^*)$, где T_{n*}—индуцированный гомоморфизм. Определим линейное вложение $\varphi_n: R^{2n} \to R^{2n+2}$ формулой $\varphi_n(e_i)=e_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots, 2n$. Оно индуцирует вложение

$\bar{\varphi}_n: G_{n,n} \to G_{n+1,n+1}$, $\bar{\varphi}_n(V)=\varphi_n(V) \oplus R^1$. Ввиду $BO=\varinjlim G_{n,n}$ отображения T_n индуцируют инволюцию $T: BO \to BO$. Имеем $H_*(BO; Z_2)=\varinjlim H_*(G_{n,n}; Z_2)$, и пусть $e(a) \in H_{\Delta(a)}(BO; Z_2)$—класс гомологий, определяемый $e(a) \in H_{\Delta(a)}(G_{n,n}; Z_2)$. Через $De(a) \in H^{\Delta(a)}(BO; Z_2)$ обозначим класс когомологий, двойственный классу $e(a)$. Тогда $T^*(De(a)) \doteq De(a^*)$. Пусть $N: BO(1) \times BO(1) \times \cdots \to BO$—расщепляющее отображение. Известно [3], что N^*—мономорфизм и кольцо $H^*(BO; Z_2)$ изоморфно подкольцу симметрических многочленов кольца $H^*(BO(1) \times BO(1) \times \ldots; Z_2) \cong Z_2[x_1, x_2, \ldots]$. В качестве базиса векторного пространства $H^*(BO; Z_2)$ можно выбрать симметрические многочлены $\mathrm{Sim}(a)$ с типичным членом $x_1^{a(1)-1} \cdot x_2^{a(2)-2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a(n)-n}$. На множестве всех конечных последовательностей $c=(c_1, c_2, \ldots, c_s)$ $c_{i-1} \leqslant c_i$, $i=2, 3, \ldots, s$, рассмотрим лексикографический порядок: если $c'=(c_1, c_2', \ldots, c_{s'}')$, то считаем $c > c'$, если существует такой номер m, что $c_j \geqslant c_j'$ при $1 \leqslant j < m$ и $c_m > c_m'$. Для символов Шуберта $a=(a_1, a_2, \ldots, a_s; t)$ и $a'=(a_1', a_2', \ldots, a_{s'}'; t')$ одинаковой размерности положим $a > a'$, если $(a(1)-1, a(2)-2, \ldots, a(s)-s) > (a'(1)-1, a'(2)-2, \ldots, a'(s')-s')$. Это отношение переносится на соответствующие классы эквивалентности. Далее, если $a > a'$, то положим $\mathrm{Sim}(a) > \mathrm{Sim}(a')$. Известно [4], что $N^*(De(a)) = \mathrm{Sim}(a)+\ldots$, где многоточие обозначает комбинацию базисных векторов более высокого порядка. Ввиду этого будем говорить, что класс $N^*(De(a))$ начинается с члена $\mathrm{Sim}(a)$. Отметим, что $N^* \circ T^*(De(a))$ начинается с члена $\mathrm{Sim}(a^*)$. Пусть функция $a_{(k)}$ определена формулой $a_{(k)}(i)=i+1$, $i=1, 2, \ldots, k$. Известно, что $H^*(BO; Z_2) \cong Z_2[1, w_1, w_2, \ldots]$ и $N^*(w_k)=\mathrm{Sim}(a_{(k)})$. Тогда $N^*(De(a_{(k)}))=\mathrm{Sim}(a_{(k)})$ и поэтому

$De(a_{(k)}) = w_k$. Обозначим через $a^{(k)}$ функцию с единственным значением аргумента $i=1$ и $a^{(k)}(1)=k+1$. Известно [5], что $H^*(G_{n,k-1};\ Z_2)$ изоморфно фактор-кольцу кольца $H^*(BO;\ Z_2)$ по идеалу, порожденному элементами w_i, $\overline{w}_j$, где $i>n$, $j>k-1$. В силу этого $De\ (a^{(k)})=\overline{w}_k$. Так как $a^{(k)}=(a_{(k)})^*$, то $T^*(w_k)=\overline{w}_k$.

Пусть $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n;\ k)$—произвольный символ Шуберта. Рассмотрим матрицу $(a_{i,j})$, где $a_{i,j}=\overline{w}_{a(i)+j-n-1}$, $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и через $W(a)$ обозначим ее определитель. Тогда $W(a)\in H^{\Delta(a)}\ (BO;\ Z_2)$ и один и тот же для эквивалентных символов. Ниже доказывается формула Джамбеллы [2] в вещественном случае.

Теорема 1. В кольце $H^*(BO;\ Z_2)$ имеет место тождество $De(a)=$ $=W(a)$.

Доказательство составляется из нескольких предложений.

Предложение 1. Если $h\in H^{\Delta(a)}(BO;\ Z_2)$ такой, что $N^*(h)$ и $N^*\circ T^*(h)$ начинаются соответственно членами $Sim(a)$ и $Sim(a^*)$, то такой класс когомологий единственный.

Доказательство. Допустим, $h'\neq h$ также удовлетворяет данному условию. Тогда.

$$N^*(h+h')=Sim(b)+\ldots \text{ и } N^*\circ T^*(h+h')=Sim(c)+\ldots,$$

где $b>a$ и $c>a^*$. Имеем $h+h'=\sum\limits_{d>b}\lambda_d\cdot De(d)$,

где $\lambda_b=1$. Поэтому

$$T^*(h+h')=T^*(\sum_{d>b}\lambda_d\cdot De(d))=\sum_{d>b}\lambda_d\cdot De(d^*),$$

$$N^*(T^*(h+h'))=N^*(\sum_{d>b}\lambda_d\cdot De(d^*))=Sim(b^*)+\ldots$$

Так как $b>a$, то $b^*<a^*<c$, что приводит к противоречию.

Введем функцию $a_{\#}$ формулой $a_{\#}(i)=a(i+1)-a(1)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,$ $n-1$.

Предложение 2. Для любого $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n;\ k)$ в кольце $H^*(BO(n);\ Z_2)$ имеет место тождество $j_{n*}(W(a))=w_n^{a(1)-1}\cdot j_{n*}(W(a_{\#}))\cdot$ Доказывается оно индукцией по $a(1)-1\geqslant 0$.

Предложение 3. Классы когомологий $N^*(W(a))$ и $N^*\circ T^*(W(a))$ начинаются соответственно членами $Sim(a)$ и $Sim(a^*)$.

Для класса эквивалентности $Cl(a)$ данного символа Шуберта a через $M(a)$ обозначим следующее множество классов эквивалентности символов Шуберта: $cl(b)\in M(a)$ тогда и только тогда, когда существуют представители $a'\in cl(a)$, $b'\in cl(b)$ такие, что $b'(i)>a'(i)$ хотя бы при одном значении i. Пусть $S(a)$—многообразие Шуберта [6], и $i'_a=i'_{n,k}\circ i_a$, где $i_a: S(a)\to G_{n,k}$, $i_{n,k}: G_{n,k}\to BO(n)$ — канонические вложения. Тогда гомоморфизм

$$i'_{a*}: H^*(BO(n);\ Z_2)\to H^*(S(a);\ Z_2)$$

эпиморфизм, ядро которого порождается всеми такими $De(b)$, что $cl(b)\in M(a)$.

Теорема 2. Кольцо $H^*(S(a);\ Z_2)$ изоморфно фактор-кольцу кольца $Z_2[1,\ w_1,\ w_2,\ \ldots]$ по идеалу, порожденному всеми такими элементами $W(b)$, что $cl(b)\in M(a)$.

Для данного символа $a=(a_1, a_2, ..., a_n; k-1)$ образуем символы $\bar{a}=(a_1+1, a_2+1, ..., a_n+1; k)$, $\acute{a}=(a_2, a_3, ..., a_n; k-1)$ и рассмотрим многообразия $S(a), S(\acute{a})$ относительно R_{n+k-1} и многообразие $S(\bar{a})$ относительно R_{n+k}. Пусть $j_a: S(\acute{a})\to S(a)$ —ограничение вложения $j_{n-1,k}$ на $S(\acute{a})$. Тогда

$$i_{\bar{a}}(S(\bar{a}))\cap j_{n-1,k}(G_{n-1,k})=i_{\bar{a}}(j_a(S(\acute{a}))),$$

и поэтому $i_{\bar{a}}$ индуцирует вложение.

$$S(\bar{a})/j_a(S(\acute{a}))\to G_{n,k}/j_{n-1,k}(G_{n-1,k}).$$

Пусть $\gamma^{n,k-1}$—каноническое n-мерное векторное расслоение над $G_{n,k-1}$, $\gamma(a)=\gamma^{n,k-1}|_{S(a)}$ и $T\gamma(a)$ —пространство Тома расслоения $\gamma(a)$.

Предложение 4. Имеет место гомеоморфизм

$$f_a: S(\bar{a})/j_a(S(\acute{a}))\to T\gamma(a).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим частный случай, когда $a=(k, k+1, ..., k+n-1; k-1)$, и установим гомеоморфизм

$$f_{n,k}: G_{n,k}/j_{n-1,k}(G_{n-1,k})\to T\gamma^{n,k-1}.$$

Предварительно определим гомеоморфизм $\bar{f}_{n,k}: G_{n,k}\setminus j_{n-1,k}(G_{n-1,k})\to tl\gamma^{n,k-1}$, где $tl\gamma^{n,k-1}$— пространство расслоения $\gamma^{n,k-1}$. Пусть $V\in G_{n,k}\setminus j_{n-1,k}(G_{n-1,k})$. Обозначим $U=V^\perp\cap R^{n+k-1}$ и заметим, что $\dim U=k-1$. Через L и V' обозначим ортогональное дополнение к U соответственно в $V^\perp$ и R^{n+k-1}. Имеем $\dim L=1$, $\dim V'=n$ и $V'\in i_{a,k-1}(G_{n,k-1})$. Пусть P_{n+k-1}—ортогональное проектирование R^{n+k} на R^{n+k-1}. Отметим, что $V'=P_{n+k-1}(V)$. Через точку $(1, 0, ..., 0)$ проведем прямую L', параллельную L. Прямая L' пересекается с R^{n+k-1} в некоторой точке x. Так как R^1 и L ортогональны к U, то и прямая L' ортогональна к U. Следовательно, $x\in V'$. Определим $\bar{f}_{n,k}(V)=(V', x)\in tl\gamma^{n,k-1}$. Обратное к $\bar{f}_{n,k}$ отображение строится автоматически. Пусть $F_{V'}$—слой расслоения $\gamma^{n,k-1}$ над точкой $V'\in G_{n,k-1}$. Из построения $\bar{f}_{n,k}^{-1}$ следует, что предельные точки подмножества $\bar{f}_{n,k}^{-1}(F_{V'})\subset G_{n,k}$ находятся среди таких подпространств V, которые содержат R^1 и, следовательно, принадлежат $j_{n-1,k}(G_{n-1,k})$. Это замечание приводит к гомеоморфизму $f_{n,k}$.

Доказательство общего случая следует из частного случая и основано на замечании: если $V\in G_{n,k}$, то $V\in i_{\bar{a}}(S(\bar{a})\setminus j_a(S(\bar{a}))$ тогда и только тогда, когда $P_{n+k-1}(V)\in i_a(S(a))$.

Пусть $j_{n-1}: BO(n-1)\to BO(n)$—стандартное вложение. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^*(BO(n); Z_2) & \xrightarrow{i'_{\bar{a}*}} & H^*(S(\bar{a}); Z_2) \\ \downarrow j_{n-1*} & & \downarrow j_{a*} \\ H^*(BO(n-1); Z_2) & \xrightarrow{i'_{\acute{a}*}} & H^*(S(\acute{a}); Z_2) \end{array}$$

следует, что j_{a*}—эпиморфизм, ядро которого порождается элементом

$i'_{a*}(w_n)$. В силу предложения 4 точная когомологическая последовательность пары $(S(\bar{a}),\ j_a(S(\bar{a}))$ выглядит следующим образом:

$$\begin{tikzcd} H^*(S(\bar{a});\ Z_2) \arrow[rr, bend left] & H^*(S(\bar{a});\ Z_2) \arrow[l, "j_{a*}"'] & H^*(T\gamma(a);\ Z_2). \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Теорема 3. Кольцо $H^*(T\gamma(a);\ Z_2)$ изоморфно идеалу в $H^*(S(\bar{a});\ Z_2)$, порожденному элементом $i'_{a*}(w_n)$.

В качестве применения дадим описание группы $H^*(T\gamma^{n,1};\ Z_2)$ как модуля над алгеброй Стинрода A_2.

Пусть $a=(2,\ 3,\ ...,\ n+1;\ 1)$, тогда $S(\bar{a})=G_{n,2}$. Кольцо $H^*(G_{n,2};\ Z_2)$ изоморфно факторкольцу кольца $Z_2[1,\ w_1,\ w_2,\ ...]$ по идеалу, порожденному элементами $w_i,\ \bar{w}_j$, где $i>n$, $j>2$. Пусть $a^{(n,i)}=(2,\ 3,...,\ i,\ i+2,\ i+3,\ ..,\ n+2;\ 2)$, $i=2,\ 3,...,\ n$. Тогда $W(a^{(n,i)})=T^*(W((a^{(n,i)})^*))=w_n\cdot w_{n-i+1}+w_{n+1}w_{n-i}$ и ядро гомоморфизма j_{a*} аддитивно порождается элементами $De(a), De(\bar{a}), De(a^{(n,i)})$, где $i=2,\ 3,\ ...,\ n$. Пусть $u_{n,1}\in H^n(T\gamma^{n,1};\ Z_2)$ класс Тома расслоения $\gamma^{n,1}$. С помощью теорем 1, 3 и формулы Ву [3] доказывается следующая теорема.

Теорема 4. Группа $H^*(T\gamma^{n,1};\ Z_2)$ аддитивно порождается элементами $u_{n,1},\ Sq^1u_{n,1},\ ...,\ Sq^nu_{n,1}$. Кроме того, $Sq^i\circ Sq^ju_{n,1}=0$ для любой допустимой итерации $Sq^i\circ Sq^j$, где $j>0$.

Пусть $\gamma^{n,1}$—каноническое комплексное n-мерное расслоение на комплексном грассмановом многообразии $G^c_{n,1}$ и $u^c_{n,1}\in H^{2n}(T\gamma^{n,1}_c;\ Z_2)$ —класс Тома. Аналогично теореме 4 доказывается следующий результат.

Теорема 5. Группа $H^*(T\gamma^{n,1}_c;\ Z_2)$ аддитивно порождается элементами $u^c_{n,1},\ Sq^2u^c_{n,1},\ Sq^4u^c_{n,1},\ ...,\ Sq^{2n}u^c_{n,1}$. Кроме того, $Sq^i\circ Sq^ju^c_{n,1}=0$ для любой допустимой итерации $Sq^i\circ Sq^j$, где $j>0$.

Кафедра геометрии и алгебры

Поступила 17.07.1984

ЛИТЕРАТУРА

1. **Огникян А. А.** Об одном обобщении оснащенного бордизма.— ДАН Арм. ССР, 1984, т. 79, № 5.
2. **Гриффитс Ф., Харрис Дж.** Принципы алгебраической геометрии, т. I. М.: Мир, 1982.
3. **Хьюзмоллер Д.** Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
4. **Шварц Дж.** Дифференциальная геометрия и топология. М.: Мир, 1970.
5. **Стонг Р.** Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973.
6. **Милнор Дж., Сташеф Дж.** Характеристические классы. М.: Мир, 1979.

Հ. Հ. ՕՀՆԻԿՅԱՆ

ԹՈՄԻ ՈՐՈՇ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՍՏ 2 ՄՈԴՈՒԼԻ ԿՈՀՈՄՈԼՈԳԻԱՆԵՐԻ ՕՂԱԿՆԵՐԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում նկարագրվում են Թոմի որոշ տարածությունների ըստ 2 մոդուլի կոհոմոլոգիաների օղակները որպես ունիվերսալ բնութագրիչ դասերի բազմանդամների օղակի ֆակտորօղակներ։ Այնուհետև մի դեպքում տրվում է այդպիսի օղակի գումարային խմբի նկարագրությունը որպես մոդուլի՝ Սթինրոդի A_2 հանրահաշվի նկատմամբ։