ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ | 3, 1982 | Естественные науки

Математика

УДК 519.95

Э. В. ЕГИАЗАРЯН

О СЛОЖНОСТИ ОПИСАНИЯ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТИЧНЫМИ БУЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В статье для «типичного» случая исследуется сложность описания множества всех решений систем уравнений с частичными булевыми функциями посредством дизъюнктивных нормальных форм, реализующих характеристические функции множества решений систем уравнений.

Известно, что многие вопросы функционирования дискретных управляющих систем сводятся к нахождению множества решений систем уравнений с не всюду определенными (частичными) булевыми функциями. При этом простое перечисление решений может оказаться громоздким, и естественным образом возникает задача «компактного» описания множества всех решений систем уравнений. Некоторые результаты в этом направлении получены в настоящей работе.

Перейдем к более точной постановке вопроса. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана на множестве $N^f \subseteq E^n$, где E^n—множество всех вершин n-мерного единичного куба и принимает значение 0 или 1. Множество N^f разбивается на два подмножества N_0^f и N_1^f ($N^f = N_0^f \cup N_1^f$, $N_0^f \cap N_1^f = \varnothing$), такие, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 \text{ на } N_1^f, \\ 0 \text{ на } N_0^f, \\ \text{не определена на } E^n \setminus N^f. \end{cases}$$

Такие функции называются частичными (не всюду определенными) булевыми функциями. Обозначим через Q_n множество всех частичных булевых функций, зависящих от n переменных.

Пусть $Q_{n,l}$—множество всех различных систем из l уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_l(x_1, \ldots, x_n) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $f_i \in Q_n$, $f_i \neq f_j$ при $i \neq j$ $(1 \leqslant i,\ j \leqslant l)$. Бинарный набор $\tilde{\alpha} \in E^n$ называется решением системы (1), если $f_i(\tilde{\alpha}) = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$.

Пусть $\{M(n)\}_{n=1}^{\infty}$—такое семейство множеств, что $|M(n)|\to\infty$ при $n\to\infty$ ($|M|$ обозначает число элементов множества M), а $M^P(n)$ — множество тех элементов из $M(n)$, которые обладают заданным свойством P. Говорят, что почти все элементы множества $M(n)$ обладают свойством P, если $\frac{|M^P(n)|}{|M(n)|}\to 1$ при $n\to\infty$.

В [1, 2] приведены асимптотические оценки числа решений почти всех систем уравнений множества $Q_{n,l}$. Аналогичные оценки для систем уравнений k-значной логики получены в [3].

Для описания множества M_Q всех решений системы уравнений $Q\in Q_{n,l}$ достаточно реализовать характеристическую функцию $f_Q(x_1, \ldots, x_n)$ множества M_Q, равную единице на M_Q и нулю на множестве $E^n\setminus M_Q$, некоторой дизъюнктивной нормальной формой (д. н. ф.). Тогда каждая конъюнкция в этой д. н. ф. будет задавать «семейство» решений, а объединение всех семейств, соответствующих конъюнкциям в д. н. ф., даст множество M_Q. Сложность такого описания множества всех решений в большой мере характеризуется числом и рангом конъюнкций в д. н. ф., реализующей функцию f_Q. Поэтому вызывает интерес исследование длины сокращенной и кратчайшей д. н. ф., «состав» этих д. н. ф. и т. д. В настоящей работе выводится для почти всех систем Q множества $Q_{n,l}$ асимптотика длины сокращенной д. н. ф., реализующей характеристическую функцию f_Q.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующими известными или легко выводимыми неравенствами.

1. Первое неравенство Чебышева [4].

Пусть случайная величина ξ принимает неотрицательные значения и имеет математическое ожидание $M\xi$. Тогда при любом $t>c$ справедливо неравенство

$$P(\xi\geqslant t)\leqslant\frac{M\xi}{t}. \tag{2}$$

2. Второе неравенство Чебышева [4].

Пусть вышеуказанная величина ξ имеет и дисперсию $D\xi$. Тогда при любом $t>0$ справедливо неравенство

$$P(|\xi-M\xi|\geqslant t)\leqslant\frac{D\xi}{t^2}. \tag{3}$$

3. При любом $x\geqslant 1$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^x<e^{-1}. \tag{4}$$

4. При любом $x\geqslant 1,7$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^x>e^{-1-\frac{1}{x}}. \tag{5}$$

5. При $l=o(2^{\frac{n}{2}})$

$$C_n^l \sim \frac{n^l}{l!}. \tag{6}$$

Всюду в работе под log понимается логарифм по основанию 2; [a] обозначает наибольшее целое, не превосходящее a. Все не определяемые здесь понятия можно найти в [5, 6].

Рассмотрим новое множество $Q'_{n,l}$ всех систем вида

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n)=1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_l(x_1, \ldots, x_n)=1, \end{cases} \tag{7}$$

где $f_i \in Q_n$, $i=1, \ldots, l$ (требование $f_i \neq f_j$ при $i \neq j$ опущено). Далее, системы предполагаются «упорядоченными», т. е. две системы Q_1 и Q_2, отличающиеся лишь перестановкой неэквивалентных уравнений, полагаются различными. Очевидно, что $|Q'_{n,l}|=3^{l2^n}$.

С использованием (6) непосредственно проверяется, что при $l=o(3^{2^{n-1}})$ достаточно определить сложность реализации характеристических функций почти всех систем множества $Q'_{n,l}$, ибо она асимптотически будет совпадать со сложностью реализации характеристических функций почти всех систем множества $Q_{n,l}$.

Пусть $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k})$—совокупность из $n-k$ номеров переменных $x_1,\ldots,x_n$. Конъюнкции вида $x_{\lambda_1}^{\sigma_1}\ldots x_{\lambda_{n-k}}^{\sigma_{n-k}}$ и соответствующие им k-мерные интервалы будем называть конъюнкциями (интервалами) направления λ. Очевидно, что интервалов одного направления 2^{n-k} штук, а вся совокупность из $C_n^k 2^{n-k}$ k-мерных интервалов распадается на C_n^k непересекающихся подмножеств интервалов одного направления.

Для заданной характеристической функции $f_Q(x_1, \ldots, x_n)$ системы $Q \in Q'_{n,l}$ будем обозначать через $I_{\lambda,k}(f_Q)$ число k-мерных максимальных интервалов направления λ, содержащихся в M_Q, а через $\bar{I}_{\lambda,k}(n, l)$—среднее значение параметра $I_{\lambda,k}(f_Q)$ на множестве $Q'_{n,l}$:

$$\bar{I}_{\lambda,k}(n, l)=\frac{1}{|Q'_{n,l}|}\sum_{Q\in Q'_{n,l}} I_{\lambda,k}(f_Q).$$

Лемма 1.

$$\bar{I}_{\lambda,k}(n,l)=\frac{2^{n-k}}{3^{l2^k}}(1-3^{-l2^k})^{n-k}.$$

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\{N_{r,\lambda}\}(1 \leqslant r \leqslant 2^{n-k})$ k-мерных интервалов направления λ. Пусть

$$e(Q, N_{r,\lambda})=\begin{cases} 1, \text{ если } N_{r,\lambda}\subseteq M_Q, \\ 0, \text{ если } N_{r,\lambda}\subseteq M_Q. \end{cases}$$

Тогда

$$I_{\lambda,k}(n,\ l)=\frac{1}{3^{l2^n}}\sum_{Q\in Q'_{n,l}} I_{\lambda,k}(f_Q)=$$

$$=\frac{1}{3^{l2^n}}\sum_{r=1}^{2^{n-k}}\sum_{Q\in Q'_{n,l}} e(Q,N_{r,\lambda})=\frac{1}{3^{l2^n}}\sum_{r=1}^{2^{n-k}}\Phi(N_{r,\lambda}),$$

где $\Phi(N_{r,\lambda})$—число систем Q из множества $Q'_{n,l}$, для которых $N_{r,\lambda}\subseteq M_Q$. Найдем эту величину для интервала $K=Nx_1x_2\dots x_{n-k}$ направления $\lambda=(1, 2, \dots, n-k)$.

Рассмотрим разложение

$$f_Q(x_1,\ \dots,\ x_n)=x_1x_2\dots x_{n-k}f_0(x_{n-k+1},\ \dots,\ x_n)\vee$$
$$\vee\bar{x}_1x_2\dots x_{n-k}f_1(x_{n-k+1},\ \dots,\ x_n)\vee x_1\bar{x}_2\dots x_{n-k}\times$$
$$\times f(x_{n-k+1},\ \dots,\ x_n)\vee\dots\vee x_1x_2\dots\bar{x}_{n-k}f_{n-k}(x_{n-k+1},\ \dots,\ x_n)\vee$$
$$\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\dots x_{n-k}f_{n-k+1}(x_{n-k+1},\ \dots,\ x_n)\vee\dots\vee$$
$$\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{n-k}f_{2^{n-k}-1}(x_{n-k+1},\ \dots,\ x_n). \qquad (8)$$

Интервал K является максимальным для функции f_Q в том и только том случае, когда $f_0(x_{n-k+1},\ \dots,\ x_n)\equiv 1$, а каждая из функций $f_i(x_{n-k+1},\dots x_n)\not\equiv 1$, $i=1,\dots,n-k$. Последнее условие означает, что хотя бы в одной из 2^kвершин интервала $Nx_1\dots\bar{x}_i\dots x_{n-k}$хотя бы одна из функций f_i, $i=1,\ \dots,\ l$ в системе (7) не равна единице. Подсчитывая число систем, для которых разложение (8) характеристических функций удовлетворяет указанным условиям, находим

$$\Phi(N_{r,\lambda})=(3^{l2^k}-1)^{n-k}\cdot(3^{l2^k})^{2^{n-k}-n+k-1}.$$

Из полученных формул следует утверждение леммы.

Пусть $\bar{I}_k(n,\ l)$ означает среднее значение числа k-мерных максимальных интервалов $I_k(f_Q)$ характеристической функции f_Q на множестве $Q'_{n,l}$. Из леммы 1 очевидным образом следует, что

$$\bar{I}_k(n,l)=\frac{C_n^k2^{n-k}}{3^{l2^k}}(1-3^{-l2^k})^{n-k}.$$

Пусть случайная величина $\xi_{n,l,k,\lambda}$ принимает значение $m\,(0\leq m\leq 2^{n-k})$ с вероятностью $P_{n,l,\lambda}(m)3^{-l2^n}$, где $P_{n,l,\lambda}(m)$—число систем Q из множества $Q'_{n,l}$, для которых $\bar{I}_{\lambda,k}(f_Q)=m$. Обозначим через $M\xi_{n,l,k,\lambda}$ математическое ожидание случайной величины $\xi_{n,l,k,\lambda}$. Из леммы 1 следует, что $M\xi_{n,l,k,\lambda}=\frac{2^{n-k}}{3^{l2^k}}(1-3^{-l2^k})^{n-k}$. Подсчитаем дисперсию $D\xi_{n,l,k,\lambda}$ этой случайной величины.

Лемма 2.

$$D\xi_{n,l,k,\lambda}=\frac{2^{n-k}C_{n-k}^{2}}{3^{l2^{k+1}}}\left(1-3^{-l2^{k}}\right)^{2(n-k-1)}-$$

$$-\frac{2^{n-k}(C_{n-k}^{2}+n-k+1)}{3^{l2^{k}}}\left(1-3^{-l2^{k}}\right)^{2(n-k)}+$$

$$+\frac{2^{n-k}}{3^{l2^{k}}}\left(1-3^{-l2^{k}}\right)^{n-k}.$$

Доказательство. Известно [4], что $D\xi_{n,l,k,\lambda}=M\xi^{2}_{n,l,k,\lambda}-(M\xi_{n,l,k,\lambda})^{2}$. Так как интервалы одного направления не пересекаются, то последовательно получаем

$$M\xi^{2}_{n,l,k,\lambda}=\frac{1}{3^{l2^{n}}}\sum_{m=0}^{2^{n-k}}m^{2}P_{n,l,\lambda}(m)=$$

$$=\frac{1}{3^{l2^{n}}}\sum_{s,t=1}^{2^{n-k}}\Phi(N_{s,\lambda},\ N_{t,\lambda})=\frac{1}{3^{l2^{n}}}\left(\sum_{s\neq t}\Phi_{\varnothing}+\sum_{s=1}^{2^{n-k}}\Phi(N_{s,\lambda})\right),$$

где $\Phi(N_{s,\lambda},\ N_{t,\lambda})$ — число систем Q из множества $Q'_{n,l}$, для которых $N_{s,\lambda}\subseteq M_Q$ и $N_{t,\lambda}\subseteq M_Q$, а $\Phi_{\varnothing}$ — число систем $Q\in Q'_{n,l}$, для которых $N_{s,\lambda}\subseteq M_Q$, $N_{t,\lambda}\subseteq M_Q$ и $N_{s,\lambda}\cap N_{t,\lambda}=\varnothing$.

Рассмотрим для определенности направление $\lambda=(1,\ldots,n-k)$ и пары интервалов $Nx_1^{\alpha_1}\ldots x_{n-k}^{\alpha_{n-k}}, Nx_1^{\beta_1}\ldots x_{n-k}^{\beta_{n-k}}$. Пусть $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k})$, $\tilde{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-k})$, $\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ — расстояние Хэмминга между наборами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$. Обозначим $\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}=x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_{n-k}^{\alpha_{n-k}}$. Имеем

$$\sum_{s\neq t}\Phi_{\varnothing}=\sum_{\tilde{\alpha}\neq\tilde{\beta}}\Phi(N_{\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}},\ N_{\tilde{x}^{\tilde{\beta}}})=$$

$$=\sum_{\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=2}\Phi(N_{\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}},\ N_{\tilde{x}^{\tilde{\beta}}})+\sum_{\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\geq 3}\Phi(N_{\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}},\ N_{\tilde{x}^{\tilde{\beta}}}).$$

Выбрав для определенности пару интервалов $(N_{x_1x_2\ldots x_{n-k}},\ N_{\bar{x}_1\bar{x}_2\cdot\ldots\cdot x_{n-k}})$, легко получаем

$$\sum_{\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=2}\Phi(N_{\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}},\ N_{\tilde{x}^{\tilde{\beta}}})=C_{n-k}^{2}2^{n-k}\Phi(N_{x_1x_2\ldots x_{n-k}},\ N_{\bar{x}_1\bar{x}_2\cdot\ldots\cdot x_{n-k}}).$$

Из разложения (8) следует, что для того чтобы интервалы $N_{x_1x_2\ldots x_{n-k}}$, $N_{\bar{x}_1,\bar{x}_2\cdot\ldots\cdot x_{n-k}}$ были максимальными для функции f_Q, необходимо и достаточно, чтобы $f_0(x_{n-k+1},\ldots,x_n)\equiv 1$, а каждая из функций $f_i(x_{n-k+1},\ldots,$

$x_n)\not\equiv 1$ $(1\leqslant l\leqslant n)$, и аналогично этому $f_{n-k+1}(x_{n-k+1},\ldots,x_n)\equiv 1$, а коэффициенты каждой из $n-k-2$ конъюнкций $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\ldots x_{n-k},\ldots,\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\cdot\ldots\cdot x_l\cdots x_{n-k},\ldots,\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\cdot\ldots\cdot\bar{x}_{n-k}$ в разложении (8) не равны тождественно единице. Подсчитывая число систем уравнений вида (7), для которых разложение (8) характеристических функций удовлетворяет вышеуказанным условиям, получаем

$$\Phi(N_{x_1x_2\ldots x_{n-k}},\ N_{\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots x_{n-k}})=(3^{l2^k}-1)^{2(n-k-1)}\cdot$$

$$\cdot 3^{l2^k\cdot(2^{n-k}-2n+2k)}.$$

Аналогичным образом при $\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\geqslant 3$ находим

$$\Phi(N_{\tilde{x}^{\alpha}},\ N_{\tilde{x}^{\beta}})=(3^{l2^k}-1)^{2(n-k)}\cdot 3^{l2^k(2^{n-k}-2n+2k-2)},$$

так как в этом случае в разложении (8) две функции должны быть равны тождественно единице, остальные произвольны. Поэтому

$$\sum_{\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\geqslant 3}\Phi(N_{\tilde{x}^{\alpha}},\ N_{\tilde{x}^{\beta}})=2^{n-k}(2^{n-k}-\sum_{i=0}^{2}C^i_{n-k})\times$$

$$\times(3^{l2^k}-1)^{2(n-k)}\cdot 3^{l2^{k+1}(2^{n-k-1}-n+k-1)}.$$

Значение $\Phi(N_{s,\lambda})$ вычислено при доказательстве леммы 1. Через полученные формулы вычисляем значение $D\xi_{n,l,k,\lambda}$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $n-l\log 3\to\infty$ при $n\to\infty$. Тогда для значений $0\leqslant k\leqslant\max\left\{0,\ \left[\log\frac{n}{l\log 3}\right]-1\right\}$ для почти всех систем Q множества $Q_{n,l}$ одновременно для каждого из C^k_n направлений имеет место

$$l_{\lambda,k}(f_Q)\sim\frac{2^{n-k}}{3^{l2^k}}(1-3^{-l2^k})^{n-k}.$$

Доказательство. При $n-l\log 3\to\infty$ выполняется условие $l=o(3^{2^{n-1}})$, поэтому достаточно доказать утверждение леммы для почти всех систем множества $Q'_{n,l}$. Пусть A_j обозначает событие, состоящее в выполнении неравенства $|\xi_{n,l,k,\lambda}-M\xi_{n,l,k,\lambda}|\geqslant t$ для j-ого направления $(1\leqslant j\leqslant C^k_n)$. Тогда, используя (3), получаем

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{C^k_n}A_j\right)\leqslant C^k_nP(|\xi_{n,l,k,\lambda}-M\xi_{n,l,k,\lambda}|\geqslant t)\leqslant C^k_n\frac{D\xi_{n,l,k,\lambda}}{t^2}.$$

Полагая $t=\frac{M\xi_{n,l,k,\lambda}}{\sqrt{n-l\log 3}}$ и пользуясь неравенством (4), получаем

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{C^k_n}A_j\right)\leqslant\frac{C^k_n(n-l\log 3)D\xi_{n,l,k,\lambda}}{(M\xi_{n,l,k,\lambda})^2}\leqslant$$

$$<\frac{(n-l\log 3)C_n^k}{M\xi_{n,l,k,\lambda}}\left\{1+\frac{4(n-k)^2}{3^{l2^{k+1}}}e^{-\frac{n-k}{3^{l2^k}}}-(n-k+1)3^{-l2^k}(1-3^{-l2^k})^{n-k}\right\}. \qquad (9)$$

Легко убедиться, что выражение в фигурных скобках в (9) ограничено при $n\to\infty$. Величина $\frac{(n-l\log 3)\,C_n^k 3^{l2^k}}{2^{n-k}}\to 0$, если $n-l\log 3\to\infty$ и $k\leqslant\max\left\{0,\left[\log\frac{n}{l\log 3}\right]-1\right\}$. При этих же условиях

$$\frac{(n-l\log 3)C_n^k}{M\xi_{n,l,k,\lambda}}\leqslant\frac{(n-l\log 3)C_n^k}{2^{n-k}}3^{l2^k}\cdot e^{\frac{n-k}{3^{l2^k}}(1+3^{-l2^k})}\to 0.$$

Отсюда и из (9) следует утверждение леммы.

Пусть $\bar{s}(n,l)$—среднее значение числа конъюнкций $s(f_Q)$ в сокращенной д. н. ф. функции f_Q на множестве $Q'_{n,l}$. Очевидно, что $\bar{s}(n,l)=\sum_{k=0}^{n}\bar{I}_k(n,l)$. Обозначим $\nu_1=\max\left\{0,\left[\log\frac{\log_3 n}{l}\right]\right\}$,

$$\nu_2=\max\left\{0,\left[\log\frac{\log_3 n}{l}\right]+2\right\}.$$

Лемма 4.

1. Если $\log\frac{\log_3 n}{l}\to\infty$ при $n\to\infty$, то

$$\bar{s}(n,l)\sim\sum_{k=\nu_1}^{\nu_1+1}\frac{C_n^k 2^{n-k}}{3^{l2^k}}(1-3^{-l2^k})^{n-k}.$$

2. Если $\log\frac{\log_3 n}{l}$ ограничено при $n\to\infty$, то

$$\bar{s}(n,l)\sim\sum_{k=\nu_1}^{\nu_2}\frac{C_n^k 2^{n-k}}{3^{l2^k}}(1-3^{-l2^k})^{n-k}.$$

Доказательство. Пусть $\log\frac{\log_3 n}{l}\to\infty$ при $n\to\infty$. Для достаточно больших n отношение

$$b_k=\frac{\bar{I}_{k+1}(n,l)}{\bar{I}_k(n,l)}=\frac{(n-k)(1+3^{-l2^k})^{n-k}}{2(k+1)(3^{l2^k}-1)}$$

меньше единицы, если $k\geqslant\log\frac{\log_3 n}{l}$, и больше единицы, если $k\leqslant$

$\leqslant \log\frac{\log_3 n}{l}$. Поэтому максимум $\bar{I}_k(n, l)$ достигается либо при $k=\nu_1=$ $=\left[\log\frac{\log_3 n}{l}\right]$, либо при $k=\nu_1+1$. Так как

$$b_{\nu_1-1} \gtrsim \frac{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}{2\log\frac{\log_3 n}{l}},$$

то

$$\sum_{k=0}^{\nu_1} \bar{I}_k(n, l) \sim \bar{I}_{\nu_1}(n, l). \tag{10}$$

Для отношения b_{ν_1+1} при достаточно больших n имеет место

$$b_{\nu_1+1} \leqslant \frac{e}{\log\frac{\log_3 n}{l}} \to 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=\nu_1+1}^{n} \bar{I}_k(n, l) \sim \bar{I}_{\nu_1+1}(n, l).$$

Отсюда и из (10) следует первое утверждение леммы.

Пусть $\log\frac{\log_3 n}{l}$ ограничено, при $n\to\infty$. Аналогичными рассуждениями получаем, что $b_{\nu_2} < \frac{1}{n}$. Нетрудно видеть, что тогда

$$\sum_{k=\nu_2}^{n} \bar{I}_k(n, l) \sim \bar{I}_{\nu_2}(n, l).$$

Используя (10), получаем второе утверждение леммы.

Теорема.

1. Если $\log\frac{\log_3 n}{l}\to\infty$ при $n\to\infty$, то у почти всех систем Q множества $Q_{n,l}$ для длины сокращенной д. н. ф. $s(f_Q)$ характеристической функции f_Q множества M_Q имеет место

$$s(f_Q) \sim \sum_{k=\nu_1}^{\nu_1+1} \frac{C_n^k 2^{n-k}}{3^{l2^k}}\left(1-3^{-l2^k}\right)^{n-k}.$$

2. Если $\log\frac{\log_3 n}{l}$ ограничено, а $n - l\log 3 \to \infty$, то для почти всех систем Q множества $Q_{n,l}$ имеет место

$$s(f_Q) \sim \sum_{k=\nu_1}^{\nu_2} \frac{C_n^k 2^{n-k}}{3^{l2^k}}\left(1-3^{-l2^k}\right)^{n-k}.$$

Доказательство. Так как и при $\log\frac{\log_3 n}{l}\to\infty$, и при $n - l\log 3\to\infty$ выполняется условие $l=o(3^{2^{n-1}})$, то достаточно доказать утверждения теоремы для почти всех систем множества $Q'_{n,l}$.

Используя лемму 4, нетрудно установить, что у почти всех систем Q множества $Q'_{n,l}$ число максимальных интервалов, содержащихся в множестве M_Q и имеющих размерность, превосходящую ν_1+1 (ν_2+1 при ограниченном ν_1), не превышает величины $o(\bar{I}_{\nu_1+1}(n,l))$($o(\bar{I}_{\nu_2+1}(n,l))$ при ограниченном ν_1), а число максимальных интервалов размерности, меньшей ν_1, и содержащихся в множестве M_Q, не превышает величины $o(\bar{I}_{\nu_1}(n,l))$. Отсюда и из лемм 3 и 4 следует утверждение теоремы.

Кафедра математической кибернетики *Поступила 3.09.1981*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Егиазарян Э. В.** Количественные характеристики систем уравнений с частичными булевыми функциями.—ДАН Арм. ССР, 1981, XIII, № 2.
2. **Егиазарян Э. В.** О некоторых характеристиках систем уравнений с частичными булевыми функциями.—Молодой научный работник. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1978, № 1, (28), с. 147—149.
3. **Егиазарян Э. В.** Оценки, связанные с числом решений систем булевых уравнений.—Сб. Вопросы кибернетики. Комбинаторный анализ и теория графов. М.: 1980.
4. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, М.: Мир, 1967.
5. **Глаголев В. В.** Некоторые оценки дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики.—Сб. Проблемы кибернетики. Вып. 10, М., Наука, 1967, с. 75—94.
6. **Журавлев Ю. И.** Об отделимости подмножеств вершин n-мерного единичного куба.—Тр. МИАН СССР. 41. М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 143—157.

Է. Վ. ԵՂԻԱԶԱՐՅԱՆ

ՄԱՍՆԱԿԻ ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՆԿԱՐԱԳՐՄԱՆ ԲԱՐԴՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում «տիպիկ» դեպքի համար հետազոտվում է մասնակի բուլյան ֆունկցիաներից կազմված հավասարումների համակարգերի լուծումների բազմության նկարագրման բարդությունը՝ լուծումների բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան ռեալացնող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի միջոցով։