

УДК 539.3

Doi- <http://doi.org/10.33018/72.2.4>

**О ВОЗМОЖНОСТИ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА СДВИГОВЫХ
ЧАСТОТ УПРУГОГО ВОЛНОВОДА, ОБУСЛОВЛЕННОГО
СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Саакян С.Л.

Ключевые слова: сдвиговые волны, волновод, резонанс.

Sahakyan S. L.

About the possibility of internal resonance of shear frequencies of elastic waveguide due to mixed boundary conditions

Keywords: shear waves, waveguide, resonance.

The study of purely shear waves in a flat layer began by Love's work in 1911 [1]. Then many problems were solved for elastic waveguides with various boundary conditions and in a dynamic formulation (problems with initial conditions). A survey of these papers is given in the monograph [2] and in [3]. In [4], localized shear waves are considered in the vicinity of the edge of a semi-infinite waveguide. The paper [5] is devoted to the case when the plane boundary of the semi-infinite part of the waveguide passes into a periodically varying boundary. In [6], resonance oscillations in a plane finite composite waveguide were investigated. In [11], the propagation of shear waves in elastic waveguide with the periodically changed boundary conditions is investigated.

In this paper we consider waveguides under different boundary conditions on the planes and at the edges bounding the waveguide. It is established that the localization of shear waves in the neighborhood of the junction of different parts of the waveguides is possible. It is also shown that the possibility of the appearance of resonant phenomena in waveguides depends essentially on the boundary conditions.

Սահակյան Ս.Լ.

**Իտաղ եզրային պայմաններով պայմանավորված առաձգական ալիքատարի սահքի
հաճախականությունների ներքին ռեզոնանսի հնարավորության մասին**

Հիմնաբառեր. սահքի ալիքներ, ալիքատար, ռեզոնանս:

Հարթ շերտում մաքուր սահքի ալիքների ուսումնասիրության սկիզբը դրվել է 1911-ին [1]: Հետագայում առաձգական ալիքատարների վերաբերյալ դինամիկ դրվածքով լուծվել են բազմաթիվ խնդիրներ՝ տարբեր եզրային պայմանների դեպքում (խնդիրներ սկզբնական պայմաններով): Այսպիսի աշխատանքների ամփոփում տրված է [2] մենագրությունում և [3] հոդվածում: Կիսաանվերջ ալիքատարի եզրի մոտ տեղայնացված սահքի ալիքներ դիտարկված են [4] հոդվածում: [5] հոդվածը նվիրված է այն դեպքին, երբ ալիքատարի կիսաանվերջ հատվածի հարթ եզրը վեր է անվում պարբերաբար փոփոխվող եզրի: [6]-ում հետազոտված են ռեզոնանսային տատանումները վերջավոր հարթ բաղադրյալ ալիքատարում: [11] հոդվածում դիտարկվել է առաձգական ալիքատարում սահքի ալիքների տարածման խնդիրը պարբերաբար փոփոխվող եզրային պայմանների դեպքում:

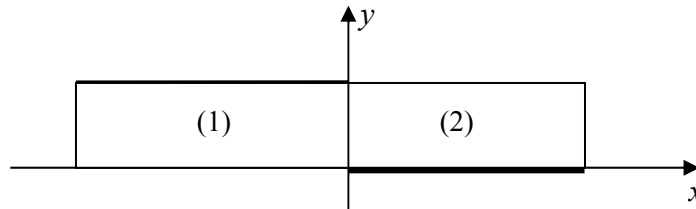
Այս հոդվածում դիտարկվում են ալիքատարներ՝ դրանք սահմանափակող հարթություններում և դրանց եզրերում տարբեր պայմանների դեպքում: Հաստատվել է ալիքատարների տարբեր մասերի անցման (կցման) շրջակայքում սահքի ալիքների տեղայնացման հնարավորությունը: Ցույց է տվել նաև, որ ալիքատարներում ռեզոնանսային երևույթների առաջացման հավանականությունը զգալիորեն կախված է եզրային պայմաններից:

Начало исследованию чисто сдвиговых волн в плоском слое было положено работой Лява 1911г. [1]. В дальнейшем были решены многочисленные задачи для упругих волноводов с различными граничными условиями и в динамической постановке (задачи с начальными условиями). Обзор этих работ приводится в монографии [2] и в статье [3]. В статье [4] рассматриваются локализованные сдвиговые волны в окрестности края полубесконечного волновода. Статья [5] посвящена случаю, когда плоская граница полубеско-

нечной части волновода переходит в периодически изменяющуюся границу. В [6] исследованы резонансные колебания в плоском конечном составном волноводе. В статье [11] рассмотрена задача распространения сдвиговых волн в упругом волноводе с периодически меняющимися граничными условиями.

В настоящей статье рассматриваются волноводы при разных граничных условиях на плоскостях и на краях, ограничивающих волновод. Устанавливается, что возможна локализация сдвиговых волн в окрестности перехода (стыка) разных частей волноводов. Также показано, что возможность появления резонансных явлений в волноводах существенно зависит от краевых условий.

1. Постановка задачи. Пусть плоский волновод состоит из двух частей. В прямоугольной декартовой системе координат первая часть волновода с индексом (1) занимает область $-a_1 \leq x < 0$, $0 \leq y < b$, $-\infty < z < \infty$; вторая часть с индексом (2) занимает область $0 < x < a_2$, $0 \leq y < b$, $-\infty < z < \infty$ (фиг.1).



Фиг.1

Рассматриваются чисто сдвиговые упругие колебания (антиплоская деформация)

$$u = 0, v = 0, w = w(x, y, t). \quad (1.1)$$

Уравнения распространения волн для частей волновода имеют вид [2, 7]:

$$c_i^2 \Delta w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad c_i^2 = \frac{\mu}{\rho}; \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, μ – модуль сдвига, ρ – плотность материала волновода, c_i – скорость объёмной сдвиговой волны. Предполагается, что поверхность волновода $y = 0$ свободна ($\sigma_{yz}^{(1)} = 0$) при $x < 0$ и закреплена при $x > 0$, а поверхность $y = b$ свободна при $x > 0$ и закреплена при $x < 0$, т.е.

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = 0, w_2 = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad w_1 = 0, \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = b. \quad (1.3)$$

На стыке волноводов (на месте сочленения) должны быть удовлетворены условия непрерывности перемещений и касательных напряжений σ_{xz} :

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad \text{при } x = 0. \quad (1.4)$$

Для выявления возможного внутреннего резонанса в зависимости от условий на краях волновода, рассмотрим две задачи:

а) когда край волновода $x = -a_1$ свободен, а край $x = a_2$ закреплён:

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=-a_1} = 0, \quad \left. w_2 \right|_{x=a_2} = 0; \quad (1.5)$$

б) когда оба края волновода свободны:

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=-a_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial w_2}{\partial x} \right|_{x=a_2} = 0. \quad (1.6)$$

2. Получение соответствующих систем уравнений. Решения уравнений (1.2) для частей волновода, удовлетворяющие граничным условиям (1.3), представляются следующим образом:

$$w_1 = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cos \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{\pi + 2\pi n}{2b}; \quad (2.1)$$

$$w_2 = e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x) \sin \lambda_m y, \quad \lambda_m = \frac{\pi + 2\pi m}{2b}. \quad (2.2)$$

Подстановка (2.1), (2.2) в уравнения (1.2) приводит к последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_n(x)$, $g_m(x)$.

Общие решения этих уравнений получаются в виде:

$$f_n(x) = a_n \sin \lambda_n p_n x + b_n \cos \lambda_n p_n x, \quad g_m(x) = c_m \sin \lambda_m p_m x + d_m \cos \lambda_m p_m x \quad (2.3)$$

Здесь a_n , b_n , c_m , d_m – произвольные постоянные,

$$p_n = \sqrt{\eta_n^2 - 1}, \quad \eta_n^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_n^2 c_t^2}, \quad p_m = \sqrt{\eta_m^2 - 1}, \quad \eta_m^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_m^2 c_t^2}. \quad (2.4)$$

Когда край волновода $x = -a_1$ свободен, а край $x = a_2$ закреплён, то с учётом условий (1.5), решения (2.3) приводятся к виду:

$$f_n(x) = F_n \cos[\lambda_n p_n (a_1 + x)], \quad g_m(x) = G_m \sin[\lambda_m p_m (a_2 - x)], \quad (2.5)$$

где F_n , G_m – новые произвольные постоянные. Тогда, (2.1) и (2.2) перепишутся в следующем виде:

$$w_1 = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos[\lambda_n p_n (a_1 + x)] \cos \lambda_n y, \quad (2.6)$$

$$w_2 = e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} G_m \sin[\lambda_m p_m (a_2 - x)] \sin \lambda_m y.$$

Из (1.4) и (2.6) следует

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos \lambda_n p_n a_1 \cos \lambda_n y &= \sum_{m=0}^{\infty} G_m \sin \lambda_m p_m a_2 \sin \lambda_m y, \\ -\sum_{n=0}^{\infty} F_n \lambda_n p_n \sin \lambda_n p_n a_1 \cos \lambda_n y &= -\sum_{m=0}^{\infty} G_m \lambda_m p_m \cos \lambda_m p_m a_2 \sin \lambda_m y. \end{aligned} \quad (2.7)$$

С учётом разложения в ряд Фурье

$$\sin \lambda_m y = \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} \cos \lambda_n y \quad (2.8)$$

из (2.7) получим следующую систему бесконечных уравнений:

$$F_n \cos \lambda_n p_n a_1 = \sum_{m=0}^{\infty} G_m b_{mn} \sin \lambda_m p_m a_2, \quad (2.9)$$

$$F_n \lambda_n p_n \sin \lambda_n p_n a_1 = \sum_{m=0}^{\infty} G_m b_{mn} \lambda_m p_m \cos \lambda_m p_m a_2.$$

Исключая неизвестные F_n из системы (2.9), относительно неизвестных G_m мы придём к системе бесконечных уравнений:

$$\begin{cases} a_{00}G_0 + a_{10}G_1 + a_{20}G_2 + \dots + a_{m0}G_m + \dots = 0 \\ a_{01}G_0 + a_{11}G_1 + a_{21}G_2 + \dots + a_{m1}G_m + \dots = 0 \\ a_{02}G_0 + a_{12}G_1 + a_{22}G_2 + \dots + a_{m2}G_m + \dots = 0 \\ \dots \\ a_{0n}G_0 + a_{1n}G_1 + a_{2n}G_2 + \dots + a_{mn}G_m + \dots = 0 \\ \dots \end{cases} \quad (2.10)$$

где

$$a_{mn} = \begin{cases} \frac{2}{(1+m+n)\pi} (\lambda_n p_n \operatorname{tg} \lambda_n p_n a_1 \operatorname{tg} \lambda_m p_m a_2 - \lambda_m p_m); & m+n \text{ чётно} \\ \frac{2}{(m-n)\pi} (\lambda_n p_n \operatorname{tg} \lambda_n p_n a_1 \operatorname{tg} \lambda_m p_m a_2 - \lambda_m p_m); & m+n \text{ нечётно} \end{cases} \quad (2.11)$$

Когда же оба края волновода свободны, то используя условия (1.6), относительно неизвестных G_m аналогичным образом приходим к бесконечной системе вида (2.10),

где

$$a_{mn} = \begin{cases} \frac{2}{(1+m+n)\pi} (\lambda_n p_n \operatorname{tg} \lambda_n p_n a_1 + \lambda_m p_m \operatorname{tg} \lambda_m p_m a_2); & m+n \text{ чётно} \\ \frac{2}{(m-n)\pi} (\lambda_n p_n \operatorname{tg} \lambda_n p_n a_1 + \lambda_m p_m \operatorname{tg} \lambda_m p_m a_2); & m+n \text{ нечётно} \end{cases} \quad (2.12)$$

В (2.11) и (2.12) обозначения определяются из (2.4).

3. Решение поставленных задач. Для выявления возможного резонанса в волноводе вместо бесконечных систем будут рассматриваться соответствующие усечённые системы. Тогда, в приближении m -ого порядка ($m = 0, 1, 2, \dots$), из условия нетривиальности решения усечённой системы получим дисперсионное уравнение для определения частоты ω :

$$\det \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{m0} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0m} & a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.1)$$

а) Один край волновода свободен, а другой закреплён. Согласно (2.11) и (3.1), в нулевом приближении ($m = 0$) имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{2}{\pi} \lambda_0 p_0 (\operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2 - 1) = 0. \quad (3.2)$$

Используя обозначения (2.4), получаются следующие частоты:

$$\frac{\omega}{c_t} = \frac{\pi}{2b}, \quad \frac{\omega}{c_t} = \sqrt{\frac{(\pi + 2\pi k)^2}{4(a_1 + a_2)^2} + \frac{\pi^2}{4b^2}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.3)$$

Бесконечное число решений устанавливает наличие частот для соответствующих мод колебаний. Из (3.3) следует, что ни при каких значениях a_1 , a_2 и b частоты не будут совпадать, т.е. появление внутреннего резонанса невозможно.

В приближении первого порядка ($m = 1$) из (3.1) с учётом (2.11) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\lambda_0 p_0 \lambda_1 p_1 (\operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2 - 1) (\operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_2 - 1) + 3(\lambda_0 p_0 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_2 - \lambda_1 p_1) (\lambda_1 p_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_1 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2 - \lambda_0 p_0) = 0 \quad (3.4)$$

В длинноволновом (низкочастотном) приближении

$$\lambda_0 p_0 a_1 \ll 1, \quad \lambda_1 p_1 a_1 \ll 1, \quad \lambda_0 p_0 a_2 \ll 1, \quad \lambda_1 p_1 a_2 \ll 1 \quad (3.5)$$

из (3.4) получаются четыре частоты:

$$\frac{\omega^2}{c_t^2} = \frac{\pi^2}{4b^2}, \quad \frac{\omega^2}{c_t^2} = \frac{9\pi^2}{4b^2}, \quad \frac{\omega^2}{c_t^2} = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{\pi^2}{4b^2}, \quad \frac{\omega^2}{c_t^2} = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{9\pi^2}{4b^2}. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что при условии

$$b^2 = 2a_1 a_2 \pi^2 \quad (3.7)$$

две частоты совпадают, т.е. возможно появление внутреннего резонанса [4, 6, 8, 9].

В приближении второго порядка ($m = 2$) из (3.1) получим следующее дисперсионное уравнение относительно частоты ω :

$$\det \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.8)$$

где a_{mn} определяются по (2.11) с использованием обозначений (2.4). В длинноволновом (низкочастотном) приближении, применяя вместе с (3.5) также $\lambda_2 p_2 a_1 \ll 1$, $\lambda_2 p_2 a_2 \ll 1$, уравнение (3.8) принимает следующий вид:

$$256 \lambda_0 p_0 \lambda_1 p_1 \lambda_2 p_2 (a_1 a_2 \lambda_0^2 p_0^2 - 1)(a_1 a_2 \lambda_1^2 p_1^2 - 1)(a_1 a_2 \lambda_2^2 p_2^2 - 1) = 0. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) устанавливает наличие шести частот для соответствующих мод колебаний:

$$\frac{\omega^2 b^2}{c_i^2} = \frac{\pi^2}{4} \ddot{x}, \quad \frac{\omega^2 b^2}{c_i^2} = \frac{9\pi^2}{4}, \quad \frac{\omega^2 b^2}{c_i^2} = \frac{25\pi^2}{4}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\omega^2 b^2}{c_i^2} = \frac{b^2}{a_1 a_2} + \frac{\pi^2}{4}, \quad \frac{\omega^2 b^2}{c_i^2} = \frac{b^2}{a_1 a_2} + \frac{9\pi^2}{4}, \quad \frac{\omega^2 b^2}{c_i^2} = \frac{b^2}{a_1 a_2} + \frac{25\pi^2}{4}.$$

Здесь $\omega b c_i^{-1}$ – безразмерная характеристика частоты. Первые три частоты не зависят от размеров частей a_1 , a_2 и от ширины b волновода. Из (3.10) следует, что при определённых геометрических характеристиках волновода возможно совпадение частот. Совпадение частот происходит при выполнении условий:

$$b = \pi \sqrt{2a_1 a_2}, \quad b = 2\pi \sqrt{a_1 a_2} \quad \text{и} \quad b = \pi \sqrt{6a_1 a_2}, \quad (3.11)$$

что приводит к появлению внутреннего резонанса.

При приближении k -го порядка ($k \geq 1$, $m = k$) предположим, что $\lambda_m p_m a_1 \ll 1$, $\lambda_m p_m a_2 \ll 1$, ($m = 0, 1, \dots, k$). Тогда a_{mn} будут определяться следующим образом:

$$a_{mn} = (\lambda_n^2 p_n^2 a_1 a_2 - 1) b_{mn}, \quad b_{mn} = \begin{cases} \frac{2\lambda_m p_m}{(1+m+n)\pi}; & m+n \text{ чётно} \\ \frac{2\lambda_m p_m}{(m-n)\pi}; & m+n \text{ нечётно} \end{cases} \quad (3.12)$$

Следовательно, усечением и приближением уравнений (2.10) получим:

$$(\lambda_i^2 p_i^2 a_1 a_2 - 1) \sum_{m=0}^k b_{mi} \lambda_m p_m G_m = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, k). \quad (3.13)$$

Эта система уравнений имеет нетривиальное решение относительно неизвестных G_0 , G_1, \dots, G_k , когда:

$$\text{а) } (i = 0, 1, \dots, k), \quad (3.14)$$

$$\text{б) } \lambda_0 p_0 \lambda_1 p_1 \cdots \lambda_k p_k \begin{vmatrix} b_{00} & b_{10} & \cdots & b_{k0} \\ b_{01} & b_{11} & \cdots & b_{k1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{0k} & b_{1k} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.15)$$

Отсюда получаем следующие решения (безразмерные частоты):

$$\frac{\omega^2 b^2}{c_i^2} = \pi^2 \left(\frac{1+2i}{2} \right)^2, \quad \frac{\omega^2 b^2}{c_i^2} = \frac{b^2}{a_1 a_2} + \pi^2 \left(\frac{1+2m}{2} \right)^2 \quad (i, m = 0, 1, \dots, k) \quad (3.16)$$

Появление внутреннего резонанса возможно при совпадении частот, что имеет место при условиях:

$$b = \pi \sqrt{(i-m)(1+i+m)} \sqrt{a_1 a_2} \quad (i, m = 0, 1, \dots, k; i-m \geq 1). \quad (3.17)$$

Таким образом, когда один край волновода свободен, а другой закреплён, то в волноводе возможно появление резонанса.

б) Оба края волновода свободны. В нулевом приближении ($m = 0$) из (3.1) с учётом (2.12) имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{2}{\pi} \lambda_0 p_0 (\operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 + \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2) = 0. \quad (3.18)$$

Используя обозначения (2.4), из (3.18) получаются следующие частоты:

$$\frac{\omega}{c_i} = \frac{\pi}{2b}, \quad \frac{\omega}{c_i} = \sqrt{\frac{(\pi + 2\pi k)^2}{(a_1 + a_2)^2} + \frac{\pi^2}{4b^2}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.19)$$

Так как эти частоты не могут совпадать, то появление внутреннего резонанса невозможно.

В приближении первого порядка ($m = 1$) из (3.1) с учётом (2.12) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\lambda_0 p_0 \lambda_1 p_1 (\operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 + \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2) (\operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_1 + \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_2) + 3(\lambda_0 p_0 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 + \lambda_1 p_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_2) (\lambda_1 p_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_1 + \lambda_0 p_0 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2) = 0 \quad (3.20)$$

Допустим, что

$$\lambda_0 p_0 a_1 \ll 1, \quad \lambda_1 p_1 a_1 \ll 1, \quad \lambda_0 p_0 a_2 \ll 1, \quad \lambda_1 p_1 a_2 \ll 1. \quad (3.21)$$

Тогда уравнение (3.20) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_0^2 p_0^2 \lambda_1^2 p_1^2 (a_1 + a_2)^2 + 3(\lambda_0^2 p_0^2 a_2 + \lambda_1^2 p_1^2 a_1) (\lambda_0^2 p_0^2 a_1 + \lambda_1^2 p_1^2 a_2) = 0. \quad (3.22)$$

Решения биквадратного уравнения (3.22) есть:

$$\frac{\omega^2}{c_i^2 b^2} = \frac{5(a_1 + a_2)^2 - 4(a_1 + a_2) \sqrt{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2}}{4(a_1 + a_2)^2 b^4} \pi^2, \quad (3.23)$$

$$\frac{\omega^2}{c_i^2 b^2} = \frac{5(a_1 + a_2)^2 + 4(a_1 + a_2) \sqrt{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2}}{4(a_1 + a_2)^2 b^4} \pi^2 \quad (3.24)$$

Совпадение величин частот $\omega b c_i^{-1}$ невозможно, что означает отсутствие внутреннего резонанса.

В приближении второго порядка ($m = 2$) из (2.10) и (2.12) получим следующую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных G_0 , G_1 и G_2 :

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi} \lambda_0 p_0 (\operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 + \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2) G_0 + \frac{2}{\pi} (\lambda_0 p_0 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 + \lambda_1 p_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_2) G_1 + \\
& + \frac{2}{3\pi} (\lambda_0 p_0 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 + \lambda_2 p_2 \operatorname{tg} \lambda_2 p_2 a_2) G_2 = 0 \\
& - \frac{2}{\pi} (\lambda_1 p_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_1 + \lambda_0 p_0 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2) G_0 + \frac{2}{3\pi} \lambda_1 p_1 (\operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_1 + \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_2) G_1 + \\
& + \frac{2}{\pi} (\lambda_1 p_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_1 + \lambda_2 p_2 \operatorname{tg} \lambda_2 p_2 a_2) G_2 = 0 \\
& \frac{2}{3\pi} (\lambda_2 p_2 \operatorname{tg} \lambda_2 p_2 a_1 + \lambda_0 p_0 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2) G_0 - \frac{2}{\pi} (\lambda_2 p_2 \operatorname{tg} \lambda_2 p_2 a_1 + \lambda_1 p_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_2) G_1 + \\
& + \frac{2}{5\pi} \lambda_2 p_2 (\operatorname{tg} \lambda_2 p_2 a_1 + \operatorname{tg} \lambda_2 p_2 a_2) G_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

В длинноволновом приближении, беря в расчёт условия (3.21) и добавляя также условия $\lambda_2 p_2 a_1 \ll 1$, $\lambda_2 p_2 a_2 \ll 1$, из условия нетривиальности решения системы (3.25) получим дисперсионное уравнение:

$$y^3 - 8y^2 + (12 + z)y - z = 0, \tag{3.26}$$

где

$$z = 18 \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2}, \quad y = \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{\omega^2}{c_i^2} - \frac{9\pi^2}{4b^2} \right). \tag{3.27}$$

Из формул Кардано условием кратности двух корней кубического уравнения является равенство нулю дискриминанта уравнения. Отсюда следует следующее условие:

$$z = \frac{1}{12} \left[37 - \frac{955}{\sqrt[3]{25} \sqrt[3]{8293 + 2496\sqrt{39}}} + \sqrt[3]{25} \sqrt[3]{8293 + 2496\sqrt{39}} \right] \approx 5.375. \tag{3.28}$$

Однако, z не может принимать такое значение при $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. Это означает, что уравнение (3.26) не может иметь кратных корней. Таким образом, можно предположить, что для задачи со свободными краями кратных корней не будет также при более больших порядках приближений. Это означает, что появление внутреннего резонанса в волноводе невозможно.

4. Заключение. В работе устанавливается возможность локализации сдвиговых волн в окрестности стыка разных частей плоского волновода. В зависимости от граничных условий, показана возможность совпадения локализованных частот колебаний, приводящее к эффекту внутреннего резонанса.

Отметим, что частный вариант задачи с симметричным расположением граничных условий относительно срединной плоскости слоя рассмотрен в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Love A.E.H. Some Problems of Geodynamics. Cambridge University Press. 1911, pp. 165-178.
2. Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides. North-Holland. 1984. 618 p.
3. Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Довгий С.А., Трофимчук А.Н., ван Хейст Г.Я. Упругие волноводы: история и современность. Математические методы и физико-механические поля. Львов, НАН Украины, 2008, т.51, №2, с.86-104. Meleshko V. V., Bondarenko A.A., Dovgiy S.A., Trofimchuk A.N., Heijst G.J.F. van. The elastic waveguides: the history and the present-day. Mathematical methods and physico-mechanical fields, 2008, vol. 51, №2, pp. 86-104 (in Russian).
4. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением. //Доклады НАН Армении. 2015. Т.115. №1. С.40-43. Belubekyan V.M., Belubekyan M.V., Resonance and Localized Shear Vibration in the Layer with Rectangular Cross Section //Reports of NAS of Armenia, 2015, v.115, №1, pp. 40-43 (in Russian).
5. Nazarov S.A. Wave scattering in the joint of a straight and a periodic waveguide //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. Т.81. № 2, pp.129-147.
6. Ghazaryan K.B., Papyan A.A. Resonance and localized shear vibration of bi-material elastic rezonator //Proc. of NAS of Armenia, Mechanics, v.70, №2, 2017, pp. 52-67.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975, 256 с. Novatsky V. Theory of elasticity, M.: Mir, 1975, pp. 256 (in Russian).
8. Belubekyan M.V. On the condition of planar localized vibration appearance in the vicinity of the free edge of a thin rectangular plate. //Proc. of the YSU, Physical and Mathematical Sciences 2017, v.51, №1, pp. 42-45.
9. Белубекян М.В. Об условиях существования волн Лява с неоднородным слоем. //Изн. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. №3. С. 7-10. Belubekyan M.V. On the Love waves existence condition in the case of nonhomogeneous layer //Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, v.44, №3, 1991, pp. 7-10 (in Russian).
10. Белубекян В.М., Белубекян М.В., Берберян А.Х. Локализация упругих сдвиговых волн в окрестности стыка плоских волноводов //Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тр. IX межд. конф., 01-06 окт, Горис, Армения, 2018, с. 76-79. Belubekyan M.V., Belubekyan V.M., Berberyan A.Kh., Localization of elastic shear waves in the vicinity of the junction of planar waveguides //The problems of dynamics of interaction if deformable media, Proceed. of IX Int. Conf., 01-06 Oct, Goris, Armenia, 2018, pp. 76-79 (in Russian).
11. Piliposyan D.G., Ghazaryan R.A., Ghazaryan K.B. Shear waves in periodic waveguide with alternating boundary conditions //Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, v.67, №3, 2014, pp. 40-48.

Сведения об авторе:

Саакян Саак Левонович – к.ф.-м.н., ЕГУ, факультет Информатики и прикладной математики. Тел.: (+374 77) 002-408; e-mail: ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 04. 12. 2018