ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,2001 Естественные науки

Механика

УДК 531.36

С.Г. ШАГИНЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНО-МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Рассматривается задача устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, когда на систему на конечном интервале времени действуют интегрально-малые возмущающие силы.

Получены достаточные условия, при которых такие системы устойчивы по действующей силе.

1. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = F(x(t); x(t-\tau)), \tag{1}$$

где $x \in R^n$; $F: R^{2n} \to R^n$ – непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая всем условиям существования и единственности решений системы (1) ([1], стр. 31) в компактном множестве

$$M = \left\{x(\tau); \|x(\cdot)\|_h < \infty; \tau \in [0;h]; h > 0\right\}, \tag{2}$$

и $F(0) = 0$.

Норму вектор-функции $x(\tau)$ можно выбрать различными способами, здесь целесообразно в виде

$$\|x(\cdot)\|_h = \left[\int_{-h}^{0} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(\tau) d\tau\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Докажем следующую теорему аналогично теореме Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [2].

Теорема 1. Если для системы (1) существует определенно-положительный функционал $V(x(\cdot))$, определенный на базе класса функции $x(\tau) \in M$, для которого

а) $\lim\limits_{\|x(\cdot)\|_h \to \infty} V(x(\cdot)) = \infty,$ (4)

б) производная $\dfrac{dV(x_\psi(t-\tau))}{dt}$ ([1], с. 141) вдоль интегральных кривых системы (1) неположительна, причем не существует ни одна целая полутраектория (кроме $x = 0$), вдоль которой $\dfrac{dV(x_\psi(t-\tau))}{dt} = 0$ (где $x_\psi(t-\tau)$ – решение системы (1), определяемое начальной вектор-функцией $\psi = \psi(t)$;

$t_0 - h \le t < t_0$), то решение $x \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Так как для решения $x = 0$ системы (1) имеют место все условия теоремы об устойчивости [3], то это решение устойчиво. Пусть $x = x_\psi(t-\tau)$ –такое решение системы (1), которое определяется некоторой начальной вектор-функцией $\psi = \psi(t)$, где $\psi = \psi(t)$ – непрерывная функция при $t \in [t_0 - h;\ \ t_0]$. Обозначим через $K_\psi \subset M$ некоторый компакт, содержащий часть траектории $x_\psi(t_0 - \tau)$ $(x_\psi(t_0-\tau) \in K_\psi \subset M)$, и пусть $A = \sup\limits_{x_\psi(\cdot) \in K_\psi} V(x_\psi(\cdot))$. Так как $V(x_\psi(\cdot))$ – непрерывный функционал, а K_ψ – компактное множество, то $A < \infty$. Следовательно, согласно условию (4), существует число $H > 0$ такое, что $V(x(\cdot)) \le A$ при $\|x(\cdot)\|_h \le H$ и $K_\psi \subset \left\{\|x(\cdot)\|_h \le H\right\}$.

При этих условиях для системы (1) имеет место теорема Красовского об асимптотической устойчивости ([4], с. 181), т.е.

$$\lim_{t\to\infty}\|x_\psi(\cdot)\|_h = 0.$$

Откуда и следует асимптотическая устойчивость в целом решения $x \equiv 0$ системы (1).

Таким образом вышеуказанная теорема доказана.

2. Рассмотрим снова систему (1) и систему

$$\dot{x} = F(x(t);\ x(t-\tau)) + \varphi(t), \tag{5}$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям, указанным в [5]:

а) $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$,

б) $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \ge T$.

Здесь $T > t_0 + h$ – заданное число.

Определение 1. Решение $x \equiv 0$ системы (1) назовем устойчивым по действующей силе, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех решений $x_\psi(t-\tau)$ системы (5) $\|x_\psi(\cdot)\|_h < \varepsilon$ при $t \ge T + h$, и если $\|\psi(\tau)\|_h < \delta$ и $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta$.

Определение 2. Решение $x \equiv 0$ системы (1) назовем асимптотически устойчивым по действующей силе, если для каждого решения $x_\psi(t-\tau)$ системы (5) удовлетворяется условие $\lim\limits_{t\to\infty}\|x_\psi(\cdot)\|_h = 0$ при всех непрерывных начальных функциях $\psi(t)$ [1] и при $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta$.

Пусть для системы (1) существует $k \times n$ постоянная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ ---- \\ a_{k1}\dots a_{kn}\end{pmatrix}$$ такая, что rang A=k≤n и

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}F_j\left(x(t); x(t-\tau)\right)\right)\equiv 0 \quad (i=1,\dots,k). \tag{6}$$

Покажем,что в этом случае существует невырожденная матрица C такая, при которой с помощью линейного преобразования $y=C\cdot x$ систему (1) можно привести к виду

$$\dot{y}_i=0 \quad (i=1,\dots,k), \tag{7}$$

$$\dot{y}_j=\phi_j\left(c_1,\dots,c_k,y_{k+1}(t),\dots,y_n(t),y_{k+1}(t-\tau),\dots,y_n(t-\tau)\right) \quad (j=k+1,\dots,n). \tag{8}$$

Пусть матрица C имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{k1}\dots a_{kn} \\ b_{k+11}\dots b_{k+1n} \\ \dots \\ b_{n1}\dots b_{nn}\end{pmatrix}, \tag{9}$$

причем detC=n (это всегда возможно, так как rangA=k). Тогда после преобразования $y=Cx$ система (1) примет вид

$$\dot{y}_i=\phi_i\left(y_1(t),\dots,y_n(t);\ y_1(t-\tau),\dots,y_n(t-\tau)\right) \quad (i=1,\dots,k). \tag{10}$$

Из (6) и (9) следует, что

$$0=\phi_i\left(y_1(t),\dots,y_n(t);\ y_1(t-\tau),\dots,y_n(t-\tau)\right) \quad (i=1,\dots,k).$$

для любых $y_1(t),\dots,y_n(t),\ y_1(t-\tau),\dots,y_n(t-\tau)$.

Следовательно ,

$$\phi_i\left(y_1(t),\dots,y_n(t),\ y_1(t-\tau),\dots,y_n(t-\tau)\right)\equiv 0 \quad (i=1,\dots,k),$$

т.е. для $y_1,\dots,y_k$ получим $\dot{y}_i=0, (i=1,\dots,k)$.

Пусть $\psi=\psi(t), t\in[t_0-h;t_0]$ – некоторая начальная вектор-функция. Обозначим через $\mu(t)=C'\psi(t)$. Тогда

$$y_i(t-\tau)=\mu_i(t_0)=c_i=const \text{ при } t\geq t_0 \quad (i=1,\dots,k)$$

(это решение можно получить, напр., с помощью метода "шагов" ([1], с. 17).

Таким образом система (10) примет вид (7)–(8). После преобразования $y=C\cdot x$ система (5) будет выглядеть так:

$$\dot{y}_i=v_i(t), (i=1,\dots,k); \tag{11}$$

$$\dot{y}_j=\phi_j\left(c_1,\dots,c_k,y_{k+1}(t),\dots,y_n(t);y_{k+1}(t-\tau),\dots,y_n(t-\tau)\right)+v_j(t) \ (j=k+1,\dots,n), \tag{12}$$

где вектор $v(t)=C\varphi(t)$, и если

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{1/2}<\delta, \text{ то } \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}v_i(t)dt\right)^2\right]^{1/2}<\|C\|_0\cdot\delta=\delta_1,$$

так как C – постоянная матрица $\left(\|C\|_0 = \max\limits_i \sum\limits_j |c_{ij}|\right)$.

Обозначим через $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_k \end{pmatrix}$; $\bar{\bar{y}} = \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если для системы (1) существует $k \times n$ постоянная матрица A $(\mathrm{rang} A = k \le n)$ такая, что выполняются условия (6), а для системы (8) существует определенно-положительный по $\bar{\bar{y}}(\tau)$ функционал $V(\bar{\bar{y}}(\cdot))$ равномерно по c_i $(i = 1,\dots,k)$, для которого

а) $\lim\limits_{\|\bar{\bar{y}}(\cdot)\|_{h(n-k)} \to \infty} V(\bar{\bar{y}}(\cdot)) = \infty$,

б) производная $V(\bar{\bar{y}}(\cdot))$ вдоль интегральных кривых $\bar{\bar{y}}_\mu(t-\tau)$ системы (8) равномерно неположительна по c_i $(i = 1,\dots,k)$:

$$\frac{dV(\bar{\bar{y}}_\mu(t-\tau))}{dt} \le 0,$$

причем не существует ни одна целая полутраектория (кроме $\bar{\bar{y}} \equiv 0$), вдоль которой $\frac{dV(\bar{\bar{y}}_\mu(t-\tau))}{dt} = 0$, то решение $x \equiv 0$ системы (1) устойчиво по действующей силе.

Здесь через $\|y(\cdot)\|_{h(m)}$ обозначена норма (3) в пространстве R^m.

Доказательство. Пусть для системы (1) существует $k \times n$ постоянная матрица А такая, что $\mathrm{rang} A = k \le n$ и выполняются условия (6). Как показано выше, в этом случае систему (8) можно привести к виду (11)–(12).

Интегрируя систему (11), получим

$$\bar{y}_\mu(t-\tau) = \mu(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{v}(\xi)d\xi$$

или $\qquad y_i(t-\tau) = c_i + \int_{t_0}^{T} v_i(t)dt$ при $t \ge T + h$ $(i = 1,\dots,k)$.

Оценим величину $\|\bar{y}(\cdot)\|_{h(k)}$ при $t \ge T + h$:

$$\|\bar{y}(t)\|_{h(k)} \le \|\mu(t_0)\|_{h(k)} + \left[\sum_{i=1}^{k} \left(\int_{t_0}^{T} v_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta_1 + \delta_1 = 2\delta_1. \qquad (13)$$

Согласно условиям теоремы 2 для системы (8) имеет место теорема 1 равномерно по c_i. Следовательно, для решений системы (12) получим

$$y_i(t-\tau) \to 0 \text{ при } t \to \infty,\ \tau \in [-h,0] \ (i = k+1,\dots,n). \qquad (14)$$

Тогда, согласно (13) и (14), для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta > 0$ и момент времени $t_* > T + h$ такие, что $\|y_\mu(\cdot)\|_h < \varepsilon$ при $t \ge t$, если $\|\mu(\tau)\|_h < \delta$.

Таким образом теорема 2 доказана.

Автор благодарит проф. М.С. Габриеляна за постоянное внимание к работе и полезные советы.

Кафедра теоретической механики *Поступила 13.07.2000*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971, 296 с.
2. **Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.** О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. – ПММ, 1954, т. 18, в. 3.
3. **Красовский Н.Н.** О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени. – ПММ, 1956, т. 20, в. 2, с. 315-327.
4. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959, 211 с.
5. **Габриелян М.С., Шагинян С.Г.** О построении функции Ляпунова.– Уч. запис. ЕГУ, 1987, №1, с. 39-45.

Ս.Գ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ՈՒՇԱՑՈՂ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏՈՎ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՓՈՔՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ԳՐԳՌՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ուշացող արգումենտով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի կայունության հարցերը, երբ համակարգի վրա ժամանակի վերջավոր միջակայքում ազդում են փոքր ինտեգրալային գրգռող ուժեր:

Ստացված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում այդպիսի համակարգերը կայուն են ըստ ազդող ուժի:

S.G. SHAHINYAN

STABILITY OF SYSTEMS WITH RETARDATION IN THE CASE OF SMALL INTEGRAL PERTURBATIONS

Summary

The paper considers the problem of stability of nonlinear differential equations systems with retardation when small integral perturbations effect the system in finite interval of time. Sufficient conditions are obtained under which such systems are stable according to the acting force.