ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,1996 Естественные науки

Механика

УДК 531.36

С. Г. ШАГИНЯН, С. Р. АМБАРЦУМЯН

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ

Рассматривается задача неустойчивости по действующей силе динамических систем, асимптотически устойчивых по Ляпунову.

Для нелинейных систем получены достаточные условия, при которых асимптотически устойчивые по Ляпунову системы будут неустойчивыми по действующей силе.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x), \tag{1}$$

где $x \in R^n, F(x): R^n \to R^n$ - непрерывная вектор-функция, допускающая непрерывные частные производные первого порядка по x в каждой ограниченной области $G \subset R^n$ и удовлетворяющая условию $F(0) = 0$.

Вместе с системой (1) рассмотрим также систему

$$\dot{x} = F(x) + \varphi(t), \tag{2}$$

где вектор-функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям, указанным в [1].

Пусть в области $\|x\| \le h$ $(h > 0)$ тривиальное решение $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво. Известно ([2], стр. 25; [3], стр. 307), что в этом случае для системы (1) существует определенно-положительная функция $\mathrm{v}(x)$, которая имеет непрерывные частные производные по x, и в области $\|x\| \le h$ ее полная производная по времени в силу системы (1) определенно-отрицательна.

Если $h = \infty$ и функция $\mathrm{v}(x)$ удовлетворяет также условию

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \mathrm{v}(x) = \infty,$$

то для системы (1) выполняются все условия теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [4], следовательно, система (1) будет асимптотически устойчива по действующей силе [1].Предположим теперь, что $h < \infty$ и

$$\left.\frac{d\mathrm{v}(x)}{dt}\right|_{(1)} > 0 \quad \text{при} \quad \|x\| > h. \tag{3}$$

Теорема 1. Если решение $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову только в области $\|x\| \le h$ $(h < \infty)$, а при $\|x\| > h$ выполнено условие (3), то решение $x = 0$ системы (1) неустойчиво по действующей силе.

Доказательство. Для того чтобы показать неустойчивость по действующей силе тривиального решения $x = 0$ системы (1), достаточно показать, что существуют хотя бы одно решение $x(t)$ системы (2) и момент времени $t_* \geq T$ такие, что $\|x(t_0)\| < \delta \leq h, \left\|\int_{t_0}^{T} \varphi(t)dt\right\| < \delta$, но $\|x(t_*)\| > h > \varepsilon$ для некоторой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям,отмеченным в [1].

Для доказательства теоремы достаточно предположить, что

$$\varphi(t) = \lambda \operatorname{gradv}(x(t_1 - 0))[\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)], \tag{4}$$

где λ - произвольная постоянная, $\delta(t)$ - функция Дирака, $t_1, t_2 \in (t_0, T), (t_1 \neq t_2)$ - некоторые моменты времени.

Очевидно, что

$$\left\|\int_{t_0}^{T} \varphi(t)dt\right\| = 0 .$$

Подставляя значение функции $\varphi(t)$ из выражения (4) в систему (2), получим

$$\dot{x} = F(x) + \lambda \operatorname{gradv}(x(t_1 - 0))[\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]. \tag{5}$$

Согласно условию теоремы тривиальное решение $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову только в области $\|x\| \leq h$, а функция $F(x)$ в этой области непрерывна. В этом случае для системы (1) существует определенно-положительная функция $\mathrm{v}(x)$ ([2], стр. 25; [3], стр. 307), которая в области $\|x\| \leq h$ имеет определенно-отрицательное производное, т.е.

$$\left.\frac{d\mathrm{v}(x)}{dt}\right|_{(1)} < 0 \quad \text{при } \|x\| \leq h, \tag{6}$$

а в области $\|x\| > h$ выполняется неравенство (3). Точка $x(t_0) = x_0 \neq 0$, удовлетворяющая условию $\|x(t_0)\| < \delta$, выбирается так, чтобы $\operatorname{gradv}(x_0) \neq 0$. Это всегда возможно, так как в противном случае из непрерывности функции $\mathrm{v}(x)$ и условия $\mathrm{v}(0) = 0$ будет следовать $\mathrm{v}(x) \equiv 0$ при $\|x\| < \delta$, что противоречит условию определенно-положительности функции $\mathrm{v}(x)$ в области $\|x\| \leq h$.

Исходя из непрерывности вектор-функции $\operatorname{gradv}(x(t))$ ($x(t)$ есть решение системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$), можно выбрать t_1 настолько близким к t_0, чтобы выполнялось условие $\operatorname{gradv}(x(t_1)) \neq 0$. Составим $\dot{\mathrm{v}}(x)$ в силу системы (5):

$$\begin{gathered}\left.\frac{d\mathrm{v}(x)}{dt}\right|_{(5)} = \operatorname{gradv}(x)\{F(x) + \lambda \operatorname{gradv}(x(t_1 - 0))[\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]\} = \\ = \operatorname{gradv}(x)F(x) + \lambda \operatorname{gradv}(x(t_1 - 0))\operatorname{gradv}(x)[\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)].\end{gathered} \tag{7}$$

Интегрируя выражение (7) по t вдоль решения $x = x(t)$ системы (5) в промежутке $[t_0, T]$, получим

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{v}(x(T)) - \mathrm{v}(x(t_0)) = \int_{t_0}^{T} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt + \lambda\, \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t_1 - 0)) \times \\
&\times \int_{t_0}^{T} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))[\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]dt = \int_{t_0}^{t_1 - 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt + \\
&+ \int_{t_1 - 0}^{t_1 + 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt + \int_{t_1 + 0}^{t_2 - 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt + \\
&+ \int_{t_2 - 0}^{t_2 + 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt + \int_{t_2 + 0}^{T} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt + \\
&+ \lambda\, \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t_1 - 0)) \Bigg\{ \int_{t_0}^{t_1 - 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))[\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]dt + \\
&+ \int_{t_1 - 0}^{t_1 + 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))[\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]dt + \int_{t_1 + 0}^{t_2 - 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t)) \times \\
&\times [\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]dt + \int_{t_2 - 0}^{t_2 + 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, [\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]dt + \\
&+ \int_{t_2 + 0}^{T} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, [\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]dt \Bigg\} = \int_{t_0}^{t_1 - 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt + \\
&+ \int_{t_1 + 0}^{t_2 - 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt + \int_{t_{1+0}}^{T} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt + \\
&+ \lambda\, \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t_1 - 0)) \Bigg\{ \int_{t_1 - 0}^{t_1 + 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))[\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]dt + \\
&+ \int_{t_2 - 0}^{t_2 + 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, [\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]dt \Bigg\},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\int_{t_1 - 0}^{t_1 + 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt = 0; \int_{t_2 - 0}^{t_2 + 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, F(x(t))dt = 0,
$$

поскольку функции $\mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x)$ и $F(x)$ непрерывные, а решение $x(t)$ имеет разрывы только первого рода в точках t_1 и t_2.

$$
\int_{t_0}^{t_1 - 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, [\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]dt = 0,
$$

$$
\int_{t_1 + 0}^{t_2 - 0} \mathrm{grad}\,\mathrm{v}(x(t))\, [\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)]dt = 0,
$$

$$\int_{t_0}^{t_1-0} \operatorname{grad}v(x(t))\,[\delta(t-t_1)-\delta(t-t_2)]dt = 0,$$

$$\int_{t_1+0}^{t_2-0} \operatorname{grad}v(x(t))\,[\delta(t-t_1)-\delta(t-t_2)]dt = 0,$$

$$\int_{t_2+0}^{T} \operatorname{grad}v(x(t))\,[\delta(t-t_1)-\delta(t-t_2)]dt = 0,$$

так как функции $\delta(t-t_1)$ и $\delta(t-t_2)$ на промежутках $[t_0,t_1),(t_1,t_2),(t_2,T]$ тождественно равны нулю. Функция $\operatorname{grad}v(x(t))F(x(t))$ в промежутках $[t_0,t_1),(t_1,t_2),(t_2,T]$ непрерывна, поскольку решение $x(t)$ системы (5) в этих промежутках непрерывно, следовательно,

$$\int_{t_0}^{T} \operatorname{grad}v(x(t))F(x(t))dt = \int_{t_0}^{t_1-0} \operatorname{grad}v(x(t))F(x(t))dt +$$
$$\int_{t_1+0}^{t_2-0} \operatorname{grad}v(x(t))F(x(t))dt + \int_{t_2+0}^{T} \operatorname{grad}v(x(t))F(x(t))dt = M < \infty.$$

Функция $v(x)$ гладкая, следовательно, $\operatorname{grad}v(x)$ является непрерывной функцией от x, а решение $x(t)$ системы (5) имеет разрывы первого рода в точках t_1 и t_2. Следовательно, интеграл (8) неоднозначен (подинтегральная функция является произведением функций Хевисайда и Дирака) и его можно представить в виде

$$\int_{t_1-0}^{t_1+0} \operatorname{grad}v(x(t))\delta(t-t_1)dt = k\operatorname{grad}v(x(t_1-0)) + (1-k)\operatorname{grad}v(x(t_1+0))$$

для любого числа $k \in [0;1]$..

Тогда

$$v(x(T)) - v(x(t_0)) = M + \lambda \operatorname{grad}v(x(t_1-0))\big[k\operatorname{grad}v(x(t_1-0)) +$$
$$+ (1-k)\operatorname{grad}v(x(t_1+0)) - p\operatorname{grad}v(x(t_2-0)) - (1-p)\operatorname{grad}v(x(t_2+0))\big] \tag{9}$$

для любых чисел $k, p \in [0;1]$..

Второе слагаемое правой части выражения (9) представляет собой скалярное произведение двух векторов, причем $\operatorname{grad}v(x(t_1-0)) \neq 0$, а вектор

$$k\operatorname{grad}v(x(t_1-0)) + (1-k)\operatorname{grad}v(x(t_1+0)) - p\operatorname{grad}v(x(t_2-0)) - (1-p)\operatorname{grad}v(x(t_2+0))$$

при любых $k, p \in [0;1]$ может обращаться в нуль тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{grad}v(x(t_1-0)) = \operatorname{grad}v(x(t_1+0)) = \operatorname{grad}v(x(t_2-0)) = \operatorname{grad}v(x(t_2+0)). \tag{10}$$

Равенство (10) может выполняться, когда

значение, так как λ - произвольное число, а функция $v(x)$ удовлетворяет неравенству (3) в области $\|x\| > h$, тогда все решения системы (1), для которых $\|x(t)\| > h$ при $t \geq T$, будут удовлетворять условию

$$\|x(t)\| > h. \tag{11}$$

Из определенно-положительности функции $v(x)$ следует также, что $x = 0$ является точкой локального минимума и существует число $\Delta > 0$ такое, что если

$$\|x\| \leq h, \text{ то } v(x) < \Delta. \tag{12}$$

Зафиксируем некоторое число $\Delta > 0$. Рассмотрим то решение $x = x(t)$ системы (5), для которого $\|x(t_0)\| = \|x_0\| < \delta \leq h; \mathrm{grad}\, v(x(t_1 - 0)) \neq 0$. Из вышесказанного следует, что при подходящем выборе λ выполняется условие

$$\begin{gathered} v(x(T)) - v(x(t_0)) > \Delta, \\ \text{т.е. } v(x(T)) > \Delta + v(x(t_0)) > \Delta. \end{gathered} \tag{13}$$

Покажем, что в этом случае существует момент времени $t_* \geq T$ такой, что $\|x(t_*)\| > h$. Предположим противное: $\|x(t)\| \leq h$ при $t \in [T; +\infty)$; из условия (12) следует, что $v(x(T)) < \Delta$, которое противоречит условию (13).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если в области $\|x\| \leq h$ для системы (1) существует определенно-положительная функция $v(x)$, полная производная которой в силу системы (1) определенно-отрицательна, и в области $\|x\| > h$ система допускает вдоль некоторой координаты только строго монотонно возрастающее неограниченное решение, то тривиальное решение $x = 0$ системы (1) неустойчиво по действующей силе.

Доказательство. Так как в области $\|x\| \leq h$ для системы (1) выполняются все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, то тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Покажем, что оно будет неустойчиво по действующей силе. Для этого достаточно показать, что существуют хотя бы одно решение системы (2), функция $\varphi = \varphi(t)$, удовлетворяющая условиям, приведенным в [1], и момент времени $t_* \geq T$ такие, что $\|x(t_0)\| \leq h, \|x(t_*)\| > h$. Не нарушая общности, можем предположить, что в области $\|x(t)\| > h$ система (1) допускает строго монотонно-возрастающее решение по координате x_1.

В этом случае целесообразно выбрать вектор-функцию $\varphi(t)$ следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$t_0 = t_1 < t_2 = T;\ p > 0.$$

При таком выборе функции $\varphi(t)$ система (2) будет

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1,\ldots,x_n) + p\big(\delta(t-t_1) - \delta(t-t_2)\big) \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1,\ldots,x_n) \\ ---------- \\ \dot{x}_n = F_n(x_1,\ldots,x_n). \end{cases} \tag{15}$$

Рассмотрим то решение

$$x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

системы (15), для которой $0 < x_1(t_0) = x_1^0 \le \|x(t_n)\| < h.$ Тогда

$$x_1(t) = \int_{t_0}^{t} F_1\big(x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots, x_n(\tau)\big)d\tau + p\int_{t_0}^{t}\big(\delta(\tau - t_1) - \delta(\tau - t_2)\big)d\tau + x_1(t_0);$$

следовательно, $x_1(t_0 + 0) = x_1(t_1 + 0) = x_1^0 + p$.

Постоянную p можно выбрать так, чтобы

$$x_1(t_1 + 0) > h.$$

Рассмотрим тот координат $\widetilde{x}_1(t)$ решения $x = \widetilde{x}(t)$ системы (1), для которого

$$\widetilde{x}_1(t_0) = x_1^0 + p.$$

Поскольку по выбору p

$$x_1^0 + p > h$$

и

$$\|x(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \ge |x_1(t)|,$$

то

$$\|\widetilde{x}(t_0)\| > \widetilde{x}_1^0(t_0) = x_1^0 + p > h. \tag{16}$$

Согласно условию теоремы, в области $\|x\| > h$ система (1)вдоль x_1 допускает только строго монотонно возрастающее неограниченное решение, следовательно, функция $\widetilde{x}_1(t)$ будет строго монотонно возрастающей, т.е.

$$\widetilde{x}_1(t') < \widetilde{x}_1(t''),$$

если $t' < t''$, и так как в промежутке (t_1, t_2) системы (1) и (2) совпадают, то для решения $x(t)$ системы (2) также

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t).$$

Выбираем момент $t_2 = T$ такой, что

$$\tilde{x}_1(t_2) - \tilde{x}_1(t_1) > p. \tag{17}$$

Это всегда возможно, поскольку в противном случае функция $\tilde{x}_1(t)$ не была бы строго монотонно-возрастающей, а была бы неубывающей или ограниченной. Из неравенств (16) и (17) будем иметь

$$\tilde{x}_1(t_2) > \tilde{x}_1(t_1) + p = p + x_1^0 + p = 2p + x_1^0.$$

Следовательно,

$$x_1(t_2 + 0) = \tilde{x}_1(t_2) - p > 2p + x_1^0 - p = p + x_1^0 > h,$$

т.е. для рассматриваемого решения $x = x(t)$ системы (2) будем иметь

$$\|x(t_*)\| > x_1(t_*) > h,$$

где $t_* = T + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ - положительное число).

Теорема 2 доказана.

Работа выполнена в рамках научной темы под грифом 96 - 862, которая финансируется из государственных централизованных источников РА.

Кафедра теоретической механики *Поступила 30.10.1996*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габриелян М. С., Шагинян С. Г.** О построении функции Ляпунова. - Уч. записки ЕГУ, 1987, № 1, с.39 - 45.
2. **Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
3. **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
4. **Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.** О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. - ПММ, 1954, в. 3, т. 18, с. 345-350.

Ս. Գ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ, Ս. Ռ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ԸՍՏ ԱԶԴՈՂ ՈՒԺԻ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է ըստ Լյապունովի ասիմպտոտիկ կայուն դինամիկական համակարգերի անկայունության խնդիրը ըստ ազդող ուժի:

Ոչ գծային համակարգերի համար ստացված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում ըստ Լյապունովի ասիմպտոտիկ կայուն համակարգերը անկայուն են ըստ ազդող ուժի: