ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1988 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

В. С. САРКИСЯН, Г. М. ГУКАСЯН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

В работе исследуется задача статической теории упругости в перемещениях однородного анизотропного, имеющего одну плоскость упругой симметрии тела. Вводится малый физический параметр, характеризующий анизотропные свойства материала, и решение строится в виде ряда по степеням этого параметра. Доказывается однозначная разрешимость пространственной задачи теории упругости ортотропного тела в классе $W_2^2(D)$ для любых объемных сил из $L_2(D)$.

Доказывается теорема о сходимости метода малого параметра для решения пространственных задач теории упругости неортотропного тела.

Вопросам теории упругости анизотропного тела посвящено много работ, среди которых особое место занимают работы С. А. Амбарцумяна [1, 2], С. Г. Лехницкого [3] и других (подробный обзор см. в [4]).

В [4—6] предложен метод малого параметра для решения некоторых задач теории упругости анизотропного, имеющего одну плоскость упругой симметрии тела.

В настоящей работе методом малого параметра решается пространственная задача теории упругости однородного анизотропного тела.

§ 1. Метод решения задачи. Пусть однородное анизотропное тело занимает область D, ограниченную поверхностью Г. Напишем уравнения Лямэ для рассматриваемого тела в предположении, что в каждой его точке имеется одна плоскость упругой симметрии [3, 4]:

$$-A[u]=f. \tag{1.1}$$

Здесь $u(x)=(u_1(x), u_2(x), u_3(x))$—вектор перемещений, $x=(x_1, x_2, x_3)$—точка, принадлежащая области D, $f(x)=(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$—вектор объемных сил, $A=\{A_{ij}\}$ $(i,j=\overline{1, 3})$—матрица, элементами которой являются следующие дифференциальные операторы:

$$A_{11}[\cdot]=C_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{3}{2}C_{16}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{C_{66}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{C_{55}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$$A_{12}[\cdot]=\frac{C_{16}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\left(C_{12}+\frac{C_{66}}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+C_{26}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{C_{45}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$$A_{13}[\cdot]=\left(C_{13}+\frac{C_{55}}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}+\left(C_{36}+\frac{C_{45}}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3},$$

$$A_{21}[\cdot]=C_{16}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\left(C_{12}+\frac{C_{66}}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{C_{26}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{C_{45}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$$A_{22}[\cdot]=\frac{C_{66}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{3}{2}C_{26}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+C_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{C_{44}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$$A_{23}[\cdot]=\left(C_{36}+\frac{C_{45}}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}+\left(C_{23}+\frac{C_{44}}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3},$$

$$A_{31}[\cdot]=\left(C_{13}+\frac{C_{55}}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{1}{2}(C_{36}+C_{45})\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3},$$

$$A_{32}[\cdot]=\frac{1}{2}(C_{36}+C_{45})\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}+\left(C_{23}+\frac{C_{44}}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}.$$

$$A_{33}[\cdot]=\frac{C_{55}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+C_{45}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{C_{44}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+C_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \qquad (1.2)$$

где C_{ij}—упругие характеристики материала.

Пусть на поверхности Г заданы перемещения

$$u(x)|_{\Gamma}=0. \qquad (1.3)$$

Для решения краевой задачи (1.1)—(1.3) введем малые физические параметры [4], характеризующие анизотропные свойства материала:

$$\mu=\frac{C_{16}}{\sqrt{C_{11}C_{66}}},\quad \mu_1=\frac{C_{26}}{\sqrt{C_{22}C_{66}}},\quad \mu_2=\frac{C_{36}}{\sqrt{C_{33}C_{66}}},\quad \mu_3=\frac{C_{45}}{\sqrt{C_{44}C_{55}}}. \qquad (1.4)$$

Из положительной определенности упругого потенциала следует, что $|\mu|<1$, $|\mu_1|<1$, $|\mu_2|<1$, $|\mu_3|<1$. Заметим, что μ, μ_1, μ_2, μ_3 обращаются в нуль в случае ортотропного материала, когда главные направления упругости совпадают с геометрическими осями.

С учетом (1.4) систему уравнений (1.1) можно записать в следующем виде:

$$-A^{(0)}[u]-\mu A^{(1)}[u]=f, \qquad (1.5)$$

где матрица $A^{(0)}=\{A^{(0)}_{ij}\}$ $(i,\ j=\overline{1,3})$ совпадает с матрицей $A=\{A_{ij}\}$ в ортотропном случае, т. е. когда $C_{16}=C_{26}=C_{36}=C_{45}=0$, а элементами матрицы $A^{(1)}=\{A^{(1)}_{ij}\}$ $(i,\ j=\overline{1,3})$ являются следующие дифференциальные операторы:

$$A^{(1)}_{11}[\cdot]=3k_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},\quad A^{(1)}_{22}[\cdot]=3\lambda_1 k_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$A^{(1)}_{33}[\cdot]=2\lambda_3 k_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$A^{(1)}_{12}[\cdot]=k_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2\lambda_1 k_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\lambda_3 k_4\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

$$A^{(1)}_{13}[\cdot]=(2\lambda_2 k_4+\lambda_3 k_2)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}.$$

$$A^{(1)}_{21}[\cdot]=2k_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\lambda_1 k_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\lambda_3 k_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$$A_{23}^{(1)}[\cdot]=(2\lambda_2 k_4+\lambda_3 k_3)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

$$A_{31}^{(1)}[\cdot]=(\lambda_2 k_4+\lambda_3 k_3)\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad A_{32}^{(1)}[\cdot]=(\lambda_2 k_1+\lambda_3 k_3)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \tag{1.6}$$

$$k_1=\frac{1}{2}\sqrt{C_{11}C_{66}}, \quad k_2=\frac{1}{2}\sqrt{C_{22}C_{66}}, \quad k_3=\frac{1}{2}\sqrt{C_{44}C_{55}},$$

$$k_4=\frac{1}{2}\sqrt{C_{33}C_{66}}, \quad \mu_i=\lambda_i\mu, \quad (i=\overline{1,3}). \tag{1.7}$$

Ищем решение краевой задачи (1.1)—(1.3) в виде ряда по степеням малого параметра μ:

$$\mathbf{u}(x)=\mathbf{u}^{(0)}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu^i \mathbf{u}^{(i)}(x). \tag{1.8}$$

Подставляя ряд (1.8) в (1.1)—(1.3), для определения неизвестных приближений $\mathbf{u}^{(i)}(x)$ $(i=0, 1, \cdots)$ получаем следующие рекуррентные краевые задачи:

$$-A^{(0)}[\mathbf{u}^{(i)}]=F^{(i)}, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{u}^{(i)}|_{\Gamma}=0 \quad (i=0, 1, \ldots), \tag{1.10}$$

где

$$F^{(0)}=\mathbf{f}, \quad F^{(i)}=A^{(1)}[\mathbf{u}^{(i-1)}] \quad (i=1, 2, \cdots).$$

Таким образом, решение пространственной задачи теории упругости анизотропного (неортотропного) тела сводится к решению системы рекуррентных пространственных задач теории упругости однородного ортотропного тела.

§ 2. Исследование вопроса существования и единственности решения пространственной задачи теории упругости однородного ортотропного тела. В этом параграфе исследуем вопрос разрешимости краевой задачи (1.9)—(1.10) при $i=0$. Напишем систему уравнений (1.9) при $i=0$ в матричной форме

$$-\sum_{(\gamma)} L^{(\gamma_1\gamma_2)}\frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}(x)}{\partial x_{\gamma_1}\partial x_{\gamma_2}}=\mathbf{f}(x), \tag{2.1}$$

где $L^{(\gamma_1\gamma_2)}=\{l_{ij}^{(\gamma_1\gamma_2)}\}$ $(\gamma_1, \gamma_2, i, j=\overline{1,3})$—следующие симметрические матрицы:

$$L^{(11)}=\begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{66}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{55}}{2} \end{pmatrix}, \quad L^{(22)}=\begin{pmatrix} \frac{C_{66}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{44}}{2} \end{pmatrix},$$

$$L^{(33)}=\begin{vmatrix} \frac{C_{55}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{44}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{vmatrix}, \quad L^{(12)}=L^{(21)}=\begin{vmatrix} 0 & C_{12}+\frac{C_{66}}{2} & 0 \\ C_{12}+\frac{C_{66}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0. & 0 \end{vmatrix},$$

$$L^{(23)}=L^{(32)}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{23}+\frac{C_{44}}{2} \\ 0 & C_{23}+\frac{C_{44}}{2} & 0 \end{vmatrix},$$

$$L^{(13)}=L^{(31)}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & C_{13}+\frac{C_{55}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13}+\frac{C_{55}}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

Пусть $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\overline{D})$ — множество вектор-функций $u(x)=(u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, компоненты которых имеют непрерывные частные производные любого порядка в $\overline{D}$ и обращаются в нуль на поверхности Г. Обозначим через $W^l_p(D)$ $(W_p^0(D)\equiv L_p(D),\ l=0, 1, \ldots;\ 1<p<\infty)$ пространство вектор-функций $u(x)=(u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, компоненты которых имеют все обобщенные производные до порядка l включительно, суммируемые в D со степенью p. Норма в $W_p^l(D)$ определяется формулой [7]

$$\|u\|_{W^l_p(D)}=\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[\iiint_D\left(|u_i|^p+\sum_{k=1}^{l}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k}\left|\frac{\partial^k u_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\right|^p dx_1\,dx_2\,dx_3\right)\right]\right\}^{1/p}. \tag{2.3}$$

Замыкание множества $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\overline{D})$ в $W_2^1(D)$ обозначим через $W(D)$. Вектор-функция $u(x)\in W(D)$ является решением краевой задачи (1.1)—(1.3) в слабом смысле, если для любой вектор-функции $v(x)\in W(D)$ справедливо равенство

$$-(Au, v)=(f, v), \tag{2.4}$$

где через (.,.) обозначено скалярное произведение в векторном трехкомпонентном пространстве функций:

$$(u, v)=\iiint_D\left[\sum_{i=1}^{3} u_i(x)v_i(x)\right]dx_1dx_2dx_3. \tag{2.5}$$

Докажем, что система (2.1) сильно эллиптическая. Так как матрицы (2.2) постоянны, то необходимым и достаточным условием сильной эллиптичности системы (2.1) является существование такого числа k_0, что при всех $u(x)\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\overline{D})$ имеет место неравенство [8]

$$(Lu, u)\geqslant k_0(-\Delta u, u), \tag{2.6}$$

где $L=\{L^{(\gamma_1, \gamma_2)}\}$, $(\gamma_1, \nu_2=1, 3)$, а Δ—оператор Лапласа

$$\Delta=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Докажем выполнение неравенства (2.6). Пусть $u(x)\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\overline{D})$. Тогда

$$(Lu, u)=\iiint\limits_D\Big[C_{11}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\frac{C_{66}}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\frac{C_{55}}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2+$$
$$+2\left(C_{12}+\frac{C_{66}}{2}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+2\left(C_{13}+\frac{C_{55}}{2}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+$$
$$+2\left(C_{23}+\frac{C_{44}}{2}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{C_{66}}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+C_{22}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+$$
$$+\frac{C_{44}}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2+\frac{C_{55}}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2+\frac{C_{44}}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2+$$
$$+C_{33}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\Big]dx_1dx_2dx_3. \tag{2.7}$$

Подынтегральное выражение в (2.7) представляет собой упругий потенциал ортотропного тела, из положительной определенности которого вытекают следующие неравенства:

$$C_{ii}>0,\ (i=\overline{1, 6}),\ 4C_{11}C_{22}-(2C_{12}+C_{66})^2>0,$$
$$C_{33}\left[C_{11}C_{22}-\left(C_{12}+\frac{C_{66}}{2}\right)^2\right]+2\left(C_{23}+\frac{C_{44}}{2}\right)\left(C_{13}+\frac{C_{55}}{2}\right)\left(C_{12}+\frac{C_{66}}{2}\right)-$$
$$-C_{11}\left(C_{23}+\frac{C_{44}}{2}\right)^2-C_{22}\left(C_{13}+\frac{C_{55}}{2}\right)^2>0. \tag{2.8}$$

С использованием неравенств (2.8) нетрудно доказать, что если взять

$$0<K_0\leqslant K^*, \tag{2.9}$$

где

$$k^*=\min\left\{C_{11}, \frac{C_{55}}{2}, \frac{C_{66}}{2}, \frac{C_{11}+C_{22}-\sqrt{(C_{11}-C_{22})^2+4\left(C_{12}+\frac{C_{66}}{2}\right)^2}}{2},\right.$$
$$\left.\overline{K}(C_{ij})\right\}, \tag{2.10}$$

$\overline{K}(C_{ij})$—минимальный корень кубического уравнения

$$k^3-g_2k^2+g_1k-g_0=0, \qquad (2.11)$$

$$g_0=C_{11}C_{22}C_{33}-C_{33}\left(C_{12}+\frac{C_{66}}{2}\right)^2+2\left(C_{12}+\frac{C_{66}}{2}\right)\left(C_{13}+\right.$$

$$\left.+\frac{C_{55}}{2}\right)\left(C_{23}+\frac{C_{44}}{2}\right)-C_{11}\left(C_{23}+\frac{C_{44}}{2}\right)^2-C_{22}\left(C_{13}+\frac{C_{55}}{2}\right)^2,$$

$$g_1=C_{11}C_{22}-\left(C_{12}+\frac{C_{66}}{2}\right)^2+C_{11}C_{33}+C_{22}C_{33}-\left(C_{23}+\frac{C_{44}}{2}\right)^2-$$

$$-\left(C_{13}+\frac{C_{55}}{2}\right)^2,$$

$$g_2=C_{11}+C_{22}+C_{33}, \qquad (2.12)$$

то неравенство (2.6) будет выполняться для всех $u(x)\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{D})$. Этим и доказана сильная эллиптичность системы (2.1).

Далее с помощью неравенства Фридрихса и (2.6) доказывается, что существует такая постоянная $\acute{k}>0$, что для всех $u(x)\in W_2{}^2(D)$ имеет место неравенство

$$(Lu, u)\geqslant \acute{k}\,\|u\|^2_{L_2(D)}. \qquad (2.13)$$

Тогда с учетом результатов работы [9] утверждается, что если поверхность Г достаточно гладкая (шесть раз непрерывно дифференцируема), то краевая задача (1.9)—(1.10) при $i=0$ однозначно разрешима в классе $W_2{}^2(D)$ для любой функции $f\in L_2(D)$, и решение допускает оценку

$$\|u^{(0)}\|_{W_2^2(D)}\leqslant C_*\|f\|_{L_2(D)}, \quad (C_*=\mathrm{const}). \qquad (2.14)$$

Более того, если Г $(6+m)$ $(m=1, 2, \cdots)$ раз непрерывно дифференцируема, то для $f\in W_2{}^m(D)$ решение $u(x)\in W_2^{2+m}(D)$ допускает оценку

$$\|u^{(0)}\|_{W_2^{2+m}(D)}\leqslant C_{**}\|f\|_{W_2^m(D)}, \quad (C_{**}=\mathrm{const}). \qquad (2.15)$$

§ 3. Сходимость метода малого параметра при решении пространственной задачи теории упругости однородного неортотропного тела.

Теорема. Существует решение первой краевой задачи (1.1)—(1.3), имеющее вид (1.8). При

$$|\mu|<\frac{1}{C_*[6(|k_1|+|\lambda_1k_2|+|\lambda_2k_4|+|\lambda_3k_3|)+|\lambda_3|]} \qquad (3.1)$$

ряд (1.8) сходится равномерно в $\overline{D}$, ряды

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j} \quad (j=\overline{1,3}) \qquad (3.2)$$

сходятся в $L_p(D)$ $(p=\overline{2,5})$, а ряды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_m}=\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x_j\partial x_m}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x_j\partial x_m} \quad (j,\ m=\overline{1,3}) \qquad (3.3)$$

—сходятся в D в среднем.

Доказательство. Пусть существует решение первой краевой задачи (1.1)—(1.3) в виде (1.8). Тогда относительно приближений $u^{(i)}(x)$ $(i=0, 1, \cdots)$ получается система рекуррентных краевых задач (1.9)—(1.10). Оценим $\|u^{(i)}\|_{W_2^2(D)}$ $(i=0, 1, \ldots)$.

Из (1.9)—(1.10) с учетом (2.14) получаем следующие неравенства:

$$\|u^{(i)}\|_{W_2^2(D)} \leqslant C_*^{i+1}\varkappa^i \|f\|_{L_2(D)} \quad (i=0,\ 1,\ \ldots), \tag{3.4}$$

где

$$\varkappa=6(|k_1|+|\lambda_1 k_2|+|\lambda_2 k_4|+|\lambda_3 k_3|)+|\lambda_3|. \tag{3.5}$$

Из оценок (3.4) вытекают следующие неравенства:

$$\|u^{(i)}\|_{L_2(D)} \leqslant C_*^{i+1}\varkappa^i \|f\|_{L_2(D)},$$

$$\left\|\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j}\right\|_{L_2(D)} \leqslant C_*^{i+1}\varkappa^i \|f\|_{L_2(D)},$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x_j \partial x_m}\right\|_{L_2(D)} \leqslant C_*^{i+1}\varkappa^i \|f\|_{L_2(D)} \quad (j,\ m=\overline{1,3};\ i=0,\ 1,\ldots) \tag{3.6}$$

Из неравенств (3.4), (3.6) следует, что если $|\mu|<\dfrac{1}{C_*\varkappa}$, то ряд (1.8) сходится как в метрике $W_2^2(D)$, так и в $L_2(D)$, а ряды (3.2), (3.3) сходятся в D в среднем.

Докажем теперь, что ряд (1.8) сходится равномерно в $\bar{D}$. Из первой теоремы вложения С. Л. Соболева [7] вытекает, что $u^{(i)}\in C(D)$ $(i=0, 1, \cdots)$. Причем оператор преобразования, переводящий функцию $u^{(i)}$ из пространства $W_2^2(D)$ в C, является ограниченным оператором, т. е. существует постоянная $M>0$, при которой

$$\|u^{(i)}\|_{C(D)} \leqslant M \|u^{(i)}\|_{W_2^2(D)}, \tag{3.7}$$

где

$$\|u^{(i)}\|_{C(D)}=\max_k\{\max_D |u_k^{(i)}(x)|\}. \tag{3.8}$$

Следовательно,

$$\|u^{(i)}\|_{C(D)} < MC_*^{i+1}\varkappa^i \|f\|_{L_2(D)} \quad (i=0,\ 1,\ \ldots). \tag{3.9}$$

Таким образом, ряд (1.8) мажорируется числовым рядом

$$MC_* \|f\|_{L_2(D)} \times \sum_{i=0}^{\infty}(|\mu| C_*\varkappa)^i, \tag{3.10}$$

который сходится при (3.1). А это значит, что ряд (1.8) сходится равномерно в $\bar{D}$, когда μ удовлетворяет условию (3.1).

Исследуем теперь ряд (3.2). Из теорем вложения С. Л. Соболева также вытекает, что $\dfrac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j}\in L_{q_*}$, где $q_*=\overline{2,5}$ и имеет место оценка

$$\left\|\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j}\right\|_{L_{q_*}(D)} \leqslant N \|u^{(i)}\|_{W_2^2(D)}, \quad N=\text{const}. \tag{3.11}$$

Из неравенства (3.11) вытекает, что ряды (3.2) сходятся в пространствах $L_{q_*}(D)$, где $q_* = \overline{2, 5}$.

Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, что если в ряде (1.8) ограничиться членами, содержащими μ^l, то ошибка не будет превосходить величины

$$\delta_l = MC_* \| f \|_{L_2(D)} \cdot \frac{(|\mu| C_* \varkappa)^{l+1}}{1 - |\mu| C_* \varkappa}. \qquad (3.12)$$

Кафедра механики сплошной среды

Поступила 14.01.1988

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967, 268 с.
2. **Амбарцумян С. А.** Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974, 448 с.
3. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957, 464 с.
4. **Саркисян В. С.** Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1976, 536 с.
5. **Саркисян В. С.** Об одном методе решения задачи изгиба анизотропных весьма пологих оболочек.—Тр. IX Советско-чехословацкого совещания: Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. (Донецк, 7—13 сентября 1986 г.). Донецк, 1987, 6 с.
6. **Саркисян В. С., Шекян Л. С.** Метод малого параметра при решении задач теории изгиба, колебаний и устойчивости анизотропных оболочек.—Механика: Межвуз. сб. научных трудов, 1982, № 2, с. 110—119.
7. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950, 256 с.
8. **Вишик М. И.** О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений.—Математический сборник, 1951, т. 29 (71), № 3, с. 614—676.
9. **Гусева О. В.** О краевых задачах для сильно эллиптических систем.—ДАН СССР, 1955, т. 102, № 6, с. 1069—1072.

Ամփոփում

Աշխատանքում քննարկվում է համասեռ, անիզոտրոպ, առաձգական սիմետրիայի մեկ հարթություն ունեցող մարմնի առաձգականության ստատիկ տեսության խնդիրը տեղափոխություններով։ Խնդիրը լուծվում է փոքր պարամետրի մեթոդով։ Առանձնացվում է նյութի անիզոտրոպ հատկությունները բնութագրող ֆիզիկական փոքր պարամետր, և խնդրի լուծումը կառուցվում է ըստ այդ պարամետրի աստիճանների շարքի միջոցով։ Ապացուցվում է, որ եթե ծավալային ուժերը պատկանում են $L_2(D)$ տարածությանը, ապա օրթոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության խնդիրը միարժեքորեն է լուծվում $W_2^2(D)$ դասում։ Ապացուցվում է փոքր պարամետրի մեթոդի զուգամիտությունը ոչ օրթոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության տարածական խնդիրների լուծման համար։

SUMMARY

In the present paper the static problem of elasticity theory for the homogeneous anisotropic (13 elastic constants) body is discussed. A small physical parameter, which characterises the anisotropic properties of the material is introduced. Then the solution is expanded in power series of the small parameter. A theorem about the convergence of the solutions is proved.