ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Труды IX международной конференции
01-06 октября
Горис, 2018

THE PROBLEMS OF DYNAMICS OF INTERACTION OF DEFORMABLE MEDIA

Proceedings of IX International Conference
01-06 October
Goris, 2018

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Труды IX международной конференции
01-06 октября 2018, Горис, Армения

При финансовой поддержке Государственного
комитета по науке МОН РА

ЕРЕВАН – 2018

УДК 539.3:06
ББК 22.251
П 781

Институт механики НАН РА
Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Национальный университет архитектуры и строительства Армении
Национальный политехнический университет Армении
Горисский Государственный университет
Арцахский Государственный университет

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Редактор: Ж.А.Авдалян

П781 Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Труды IX международной конференции 01-06 октября 2018, Горис, Армения. – Ер.: НУАСА, 2018.- 402 с.

В сборник включены доклады, представленные на IX-ую международную конференцию «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», посвященную 75-летию Национальной Академии Наук РА.

УДК 539.3:06
ББК 22.251

ISBN 978-9939-63-305-3

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ

IX միջազգային գիտաժողովի նյութեր
01-06 հոկտեմբերի 2018թ., Գորիս, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2018

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

THE PROBLEMS OF DYNAMICS OF INTERACTION OF DEFORMABLE MEDIA

Proceedings of IX International Conference
01-06 October 2018, Goris, Armenia

YEREVAN – 2018

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ СДВИГА В СОСТАВНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Джилавян С.А., Наапетян С.Т.

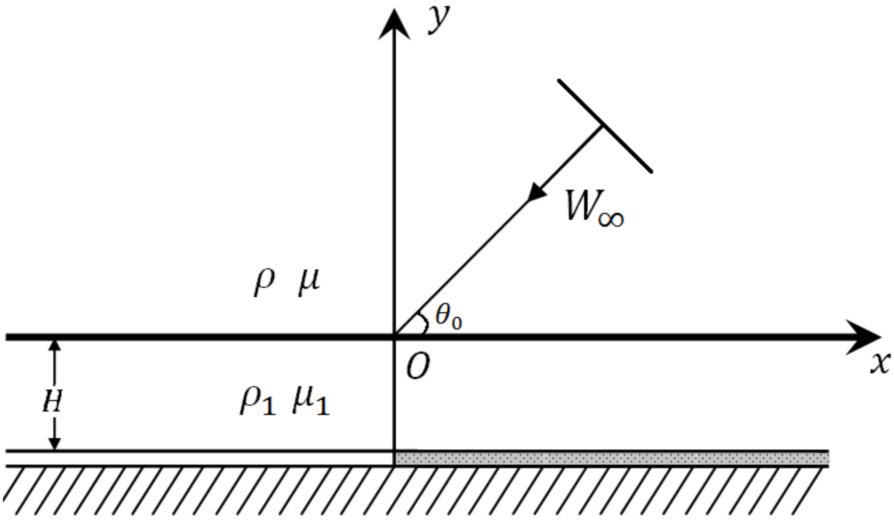
Рассматривается задача дифракции сдвиговой плоской волны в составном упругом полупространстве. Дифракция обусловлена смешанным граничным условием. В результате дифракции в неоднородном полупространстве, кроме известных волн отражения, распространяются локализованные (поверхностные) и объёмные волны. Используя интегральное преобразование Фурье, краевая задача дифракции упругих волн сводится к задаче типа Римана теории аналитических функций, для решения которой использован метод факторизации. Получено решение функционального уравнения, контурное интегрирование позволило получить распределение волнового поля в каждой подобласти упругого составного полупространства.

Рассмотрим упругое составное полупространство, отнесённое к декартовой системе координат $Oxyz$, содержащее упругое полупространство $y>0$, контактирующее по плоскости $y=0$ с упругим слоем толщиной H. Считаем, что полупространство $y>0$ и упругий слой защемлены между собой (полный контакт) в плоскости Oxz. На краю $y=-H$ слоя – смешанные граничные условия. При $x<0$ поверхность слоя свободна от напряжений, при $x>0$ упругий слой склеен с абсолютно жёсткой средой (упругое закрепление).

Пусть из бесконечности, под некоторым углом θ_0 распространяется сдвиговая волна (гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и в дальнейшем опускается, т.е. задача решается в амплитудах, t – параметр времени) с амплитудой

$$w_\infty(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0},$$

где $k=\omega/c$ – волновое число, $c=\sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны, μ,ρ и μ_1,ρ_1 – модули сдвига и плотности полупространства и слоя, соответственно, ω – частота колебаний, $0<\theta_0<\pi/2$.



Рассматриваемая среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении волнового поля в составном полупространстве. Для определения амплитуд перемещения имеем следующие уравнения [1]:

$$\Delta w+k^2w=0,\quad y>0$$

$$\Delta w_1+k_1^2w_1=0,\quad -H<y<0 \tag{1}$$

$w(x,y)$ и $w_1(x,y)$ – функции амплитуд полупространства $y>0$ и слоя, соответственно, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

Граничные и контактные условия запишутся в виде:

$$y=-H \qquad w_1(x,-H)=\psi_-(x)+\eta q_+(x), \qquad \mu_1\frac{\partial w_1}{\partial y}=q_+(x)$$

$$y=0 \qquad w=w_1, \quad \mu\frac{\partial w}{\partial y}=\mu_1\frac{\partial w_1}{\partial y}, \tag{2}$$

где $q_+(x)=\sigma^1_{yz}(x,-H)\theta(x)$, $\psi_-(x)=w_0\theta(-x)$; $q_+(x)$ – функция напряжения при $y=-H$, $\psi_-(x)$ представляет перемещение при $y=-H$, η характеризует свойства клея и $\eta=0$ соответствует случаю жёсткого защемления границы, а $\eta\to\infty$ – свободному краю, $\theta(x)$ – известная функция Хэвисайда, $w_0=w_1(x,-H)$ при $x<0$.

Решение краевой задачи должно удовлетворять также условию уходящей волны.

Для решения поставленной задачи применяем действительное преобразование Фурье по координате x. Относительно трансформантов Фурье получим уравнения:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\left(\sigma^2-k^2\right)\bar{u}=0, \qquad y>0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2\bar{w}_1}{dy^2}-\left(\sigma^2-k_1^2\right)\bar{w}_1=0, \quad -H<y<0, \tag{4}$$

где функция $\bar{u}=\bar{w}-\bar{w}_\infty$ представляет уходящую волну.

Ограниченные решения уравнений имеют вид:

$$\bar{u}=A(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}, \quad y>0 \tag{5}$$

$$\bar{w}_1=B(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}+C(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}, \quad -H<y<0. \tag{6}$$

Следовательно, для искомых преобразований Фурье получим:

$$\bar{w}=A(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}+2\pi e^{-iky\sin\theta_0}\delta(\sigma-k\cos\theta_0) \tag{7}$$

$$\bar{w}_1=B(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}+C(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}, \tag{8}$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака.

Принимается, что $\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$, $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}=-i\sqrt{k_1^2-\sigma^2}$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ обходит $\sigma=-k_1, \sigma=-k$ – точки ветвления сверху, а $\sigma=k$, $\sigma=k_1$ – точки снизу и удовлетворяется условие уходящей волны [3, 4].

Из граничных условий для функций $A(\sigma), B(\sigma), C(\sigma)$ в (7) и (8) получим:

$$A(\sigma)=\frac{\eta\bar{q}_+(\sigma)}{\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}\left(\frac{1}{\eta}\operatorname{sh}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H+\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\operatorname{ch}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H\right)+$$
$$+\bar{\psi}_-(\sigma)\operatorname{ch}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H-2\pi\delta(\sigma-k\cos\theta_0) \tag{9}$$

$$B(\sigma)=-\frac{\bar{q}_+(\sigma)(1-\eta\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2})-\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\bar{\psi}_-(\sigma)}{2\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}e^{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H}} \tag{10}$$

$$C(\sigma)=\frac{\bar{q}_+(\sigma)(1+\eta\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2})+\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,\bar{\psi}_-(\sigma)}{2\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H}} \tag{11}$$

где $\bar{q}_+(\sigma)$ и $\bar{\psi}_-(\sigma)$ – преобразования Фурье функций $q_+(x)$ и $\psi_-(x)$.

Относительно $\bar{q}_+(\sigma)$ и $\bar{\psi}_-(\sigma)$ получим следующее функциональное уравнение, которое можно рассматривать как краевую задачу типа Римана на действительной оси [3, 4]:

$$\mathrm{K}(\sigma)\bar{\psi}_-(\sigma)+\bar{q}_+(\sigma)=-\frac{4\pi i\mu k\sin\theta_0\delta(\sigma-k\cos\theta_0)}{Q(k\cos\theta_0)}, \tag{12}$$

где

$$K(\sigma)=\frac{\Lambda(\sigma)}{Q(\sigma)},$$

$$\Lambda(\sigma)=\left(\mu+\mu_1\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H\right)\Lambda_*(\sigma),$$

$$\Lambda_*(\sigma)=\frac{1}{\mu+\mu_1}\left(\mu+\mu_1\frac{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}{\sqrt{\sigma^2-k^2}}\frac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H\right)}\right),$$

$$Q(\sigma)=\frac{\eta}{\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}\left(\left(\frac{1}{\eta}\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}+\mu_1^2\left(\sigma^2-k_1^2\right)\right)\mathrm{sh}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H+\right.$$

$$\left.+\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\left(\frac{1}{\eta}+\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}\right)\mathrm{ch}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H\right).$$

Здесь $\Lambda(\sigma)$ – характеристическая функция известной задачи Лява, а $Q(\sigma)$ – характеристическая функция задачи типа Лява, когда край слоя закреплён упруго (склеен с абсолютно жёсткой средой).

Как известно, $k<\sigma_\Lambda<k_1$ – положительное решение уравнения $\Lambda(\sigma)=0$, а $k<\sigma_\mathrm{T}<k_1$ – решение уравнения $Q(\sigma)=0$, если только $\mathrm{ctg}\sqrt{k_1^2-k^2}H<\eta\mu_1\sqrt{k_1^2-k^2}$ $\left(k<k_1\right)$, т.е. $\Lambda(\pm\sigma_\Lambda)=0$, $Q(\pm\sigma_T)=0$.

Факторизируя функцию $\mathrm{K}(\sigma)$, представим её в виде $\mathrm{K}(\sigma)=\mathrm{K}^+(\sigma)\mathrm{K}^-(\sigma)$, $\mathrm{K}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$.

Из (12) получим:

$$\mathrm{K}^-(\sigma)\bar{\psi}_-(\sigma)+\frac{\bar{q}_+(\sigma)}{\mathrm{K}^+(\sigma)}=-2\pi i f\delta(\sigma-k\cos\theta_0), \tag{13}$$

где

$$f=\frac{2k\mu\sin\theta_0K^+(k\cos\theta_0)}{Q(k\cos\theta_0)}=\mathrm{const},\quad Q(x)\delta(x)=Q(0)\delta(x).$$

Имея в виду известное представление функции $\delta(x)$ [3]

$$2\pi i\delta(\sigma-k\cos\theta_0)=\frac{1}{\sigma-k\cos\theta_0-i0}-\frac{1}{\sigma-k\cos\theta_0+i0}, \tag{14}$$

получим:

$$K^{-}(\sigma)\bar{\psi}_{-}(\sigma)+\frac{f}{\sigma-k\cos\theta_0-i0}=\frac{f}{\sigma-k\cos\theta_0+i0}-\frac{\bar{q}_{+}(\sigma)}{\mathrm{K}^{+}(\sigma)}. \qquad (15)$$

Следовательно, [3, 4]

$$\bar{\psi}_{-}(\sigma)=-\frac{f}{\mathrm{K}^{-}(\sigma)\left(\sigma-k\cos\theta_0-i0\right)} \qquad (16)$$

$$\bar{q}_{+}(\sigma)=\frac{f\mathrm{K}^{+}(\sigma)}{\sigma-k\cos\theta_0+i0} \qquad (17)$$

Принимается, что в данной задаче типа Римана действительная ось обходит не только точки ветвления $\pm k, \pm k_1$ функций $\sqrt{\alpha^2-k^2}$, $\sqrt{\alpha^2-k_1^2}$, но и точки $\sigma=-\sigma_\Lambda$, $\sigma=-\sigma_T$ сверху, а точки $\sigma=\sigma_\Lambda$, $\sigma=\sigma_T$ – снизу, тем самым, обеспечивая условие уходящей волны.

Функции $\dfrac{1}{\sigma-k\cos\theta_0\pm i0}$ регулярны в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости, соответственно.

$\mathrm{K}^{\pm}(\alpha)$ регулярны и не имеют нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$ и $\operatorname{Im}\alpha<0$, соответственно, $\mathrm{K}^{\pm}(\sigma)$ – краевые значения этих функций, к тому же, $\mathrm{K}^{\pm}(\alpha)\to 1$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности. $\mathrm{K}^{\pm}(\alpha)$ строятся по известным методам факторизации [2, 3, 4]:

$$\mathrm{K}^{+}(\alpha)=\exp\left(F^{+}(\alpha)\right),\ \ \mathrm{K}^{-}(\alpha)=\exp\left(F^{-}(\alpha)\right)$$

$$F^{+}(\sigma)=\int_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx,\quad F^{-}(\sigma)=F^{+}(-\sigma)$$

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln K(\sigma)e^{-i\alpha x}d\sigma,\quad K^{-}(-\sigma)=K^{+}(\sigma)$$

После обратного преобразования Фурье получим:

$$w(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}\,y}e^{-i\sigma x}d\sigma+e^{-iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0} \qquad (18)$$

при $x<0, y>0$:

$$w(x,y)=e^{-iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0}+A_0e^{iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0}+A_\Lambda e^{-\sqrt{\sigma_\Lambda^2-k_1^2}\,y-i\sigma_\Lambda x}+\frac{1}{2\pi}\int_l f_0(\alpha,y)e^{-i\sigma x}d\alpha, \qquad (19)$$

где

$$A_0=-\left(\frac{fiK^{+}(k\cos\theta_0)\cos\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\theta_0}\,H}{K(k\cos\theta_0)}+1\right)$$

$$A_\Lambda=-\frac{fiK^{+}(\sigma_\Lambda)Q(\sigma_\Lambda)\operatorname{ch}\sqrt{\sigma_\Lambda^2-k_1^2}\,H}{\Lambda'(\sigma_\Lambda)(\sigma_\Lambda-k\cos\theta_0)}$$

$$f_0(\alpha,y)=\frac{\eta fK^{+}(\sigma)}{\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,(\sigma-k\cos\theta_0+i0)}\left(\frac{1}{\eta}\operatorname{sh}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,H+\right.$$

$$\left.+\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\operatorname{ch}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,H\right)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}\,y}$$

т.е. волновое поле состоит из падающей, отражённой, поверхностной волны Лява и дифрагированной объёмной волны. ω/σ_Λ – скорость распространения волны Лява.

При $x>0,\ y>0$ получим:

$$w(x,y)=e^{-iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0}+A_1e^{iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0}+A_Te^{-\sqrt{\sigma_T^2-k^2}\,y-i\sigma_T x}+\frac{1}{2\pi}\int_l f_1(\alpha,y)e^{-i\alpha x}d\alpha\,, \qquad (20)$$

где

$$A_1=-\left[\frac{i\eta fK(k\cos\theta_0)}{\mu_1\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\theta_0}\,K^-(k\cos\theta_0)}\left(\frac{1}{\eta}\sin\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\theta_0}\,H+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mu_1\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\theta_0}\cos\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\theta_0}\,H\right)+1\right]$$

$$A_T=\frac{if\Lambda(\sigma_T)\left(sh\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}\,H+\eta\mu_1\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}\,ch\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}\,H\right)}{\mu_1(\sigma_T-k\cos\theta_0)}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(\frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}}Q(\sigma_T)+\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}\,Q'(\sigma_T)\right)K^-(\sigma_T)+\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}\,Q(\sigma_T)\left(K^-\right)'(\sigma_T)}$$

$$f_1(\alpha,y)=-\frac{f\mathrm{ch}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,H}{K^-(\sigma)(\sigma-k\cos\theta_0-i0)}e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}\,y},$$

т.е. волновое поле состоит из падающей, отражённой, локализованной (поверхностной) волны задачи типа Лява, когда край слоя закреплён упруго (упругий слой склеен с абсолютно жёсткой средой) и дифрагированной объёмной волны. ω/σ_T – скорость распространения волны типа Лява.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Миттра Р., Ли С. Аналатические методы теории волноводов. М.: МИР, 1974, 323 с.
3. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С. 3–17.
4. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А. Дифракция локализованной сдвиговой волны на крае полубесконечной трещины в составном упругом пространстве // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №4. С.10–20.

<u>Сведения об авторах:</u>

Джилавян Самвел Акопович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра механики ЕГУ.
Тел.: (374 94) 50 07 70; **E-mail:** samjilavyan@ysu.am

Наапетян Севак Татосович – аспирант, кафедра механики ЕГУ.
Тел.: (374 98) 10 56 26; **E-mail:** sevaknahapetyan@gmail.com