ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2005 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

В. М. БЕЛУБЕКЯН, М. В. БЕЛУБЕКЯН

ЧАСТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В СОСТАВНОМ КЛИНЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ В ВЕРШИНЕ

Задачи определения напряженно-деформированного состояния однородного изотропного клина с сосредоточенной нагрузкой в вершине приводятся в большинстве монографий по теории упругости. Решения аналогичных задач для анизотроных клиньев приводится в монографии С.Г. Лехницкого [1]. В настоящей работе рассматриваются составные клинья. Показывается, что в общем случае простые решения типа логарифмической особенности для перемещений недостаточны для решения задач. Определяется класс частных задач, решения которых получаются в аналитическом виде.

1. В прямоугольной декартовой координатной системе (x, y, z) уравнения равновесия в перемещениях для задач плоской деформации (ПД) и обобщенного плоского напряженного состояния (ОПНС) имеют вид

$$\begin{aligned} &\Delta u+\frac{2}{k-1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \\ &\Delta v+\frac{2}{k-1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u, v – упругие перемещения в плоскости x, y,

$$k=3-4\nu \text{ для ПД}, \quad k=(3-\nu)/(1+\nu) \text{ для ОПНС} \tag{1.2}$$

Известно, что задачи с сосредоточенными нагрузками имеют особенность $\sqrt{x^2+y^2}$ для напряжений и, следовательно, логарифмическую – для перемещений [1–3]. Общее решение системы (1.1) с логарифмической особенностью для перемещений имеет вид [4]

$$\begin{aligned} &u=A_1\ln(x+iy)+A_2\frac{y}{x+iy}+A_3\ln(x-iy)+A_4\frac{y}{x+iy}, \\ &v=(iA_1-kA_2)\ln(x+iy)+A_2\frac{iy}{x+iy}-(iA_3+kA_4)\ln(x-iy)-A_4\frac{iy}{x-iy}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

В цилиндрической системе координат $(r,\ \theta)$ из (1.3) выражения для деформаций получаются в следующем виде:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{1}{r}\left(e^{i\theta}A_1-k\sin\theta A_2+e^{-i\theta}A_3-k\sin\theta A_4\right),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\left[-e^{i\theta}A_1+i\left(e^{-i\theta}-k\cos\theta\right)A_2-e^{-i\theta}A_3-e^{-i\theta}A_3-i\left(e^{i\theta}-k\cos\theta\right)A_4\right], \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2r}\left[2ie^{i\theta}A_1+(1-k)e^{i\theta}A_2-2ie^{-i\theta}A_3+(1-k)e^{-i\theta}A_4\right].$$

При помощи (1.4) формулы, определяющие напряжения для задач ОПНС, приводятся к следующему виду:

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\nu)r}\left[e^{i\theta}A_1+\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\sin\theta-\frac{2i}{1-\nu}\cos\theta\right)A_2-e^{-i\theta}A_3+\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\sin\theta+\frac{2i}{1-\nu}\cos\theta\right)A_4\right],$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-\frac{E}{(1+\nu)r}\left[e^{i\theta}A_1-\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\sin\theta-\frac{2i}{1-\nu}\cos\theta\right)A_2+e^{-i\theta}A_3-\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\sin\theta+\frac{2i}{1-\nu}\cos\theta\right)A_4\right],$$

$$\sigma_{\theta r}=\frac{E}{(1+\nu)r}\left(ie^{i\theta}A_1-\frac{1-\nu}{1+\nu}e^{i\theta}A_2-ie^{-i\theta}A_3-\frac{1-\nu}{1+\nu}e^{-i\theta}A_4\right).$$

(1.5)

Аналогичные выражения (отличаются только некоторые коэффициенты) получаются и для напряжений задачи ПД, для краткости они здесь не приводятся.

2. Рассматривается полубесконечная пластинка (или полубесконечное пространство для задачи ПД) при наличии сосредоточенной нагрузки P на границе (рис. 1). Пластинка составлена из двух разнородных материалов, соединенных по линии $\theta=-\gamma$. В дальнейшем индекс (1) будет относиться к характерным величинам области $-\gamma<\theta<\pi/2$, а индекс (2) – к области $-\pi/2<\theta<-\gamma$. Задача решается при следующих граничных условиях :

$$\theta=\frac{\pi}{2}:\quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)}=0,\quad \sigma_{\theta r}^{(1)}=0;$$
$$\theta=-\frac{\pi}{2}:\quad \sigma_{\theta\theta}^{(2)}=0,\quad \sigma_{\theta r}^{(2)}=0; \quad (2.1)$$

$$\theta=-\gamma:\quad u_r^{(1)}=u_r^{(2)},\quad u_\theta^{(1)}=u_\theta^{(2)},\quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)}=\sigma_{\theta\theta}^{(2)},\quad \sigma_{\theta r}^{(1)}=\sigma_{\theta r}^{(1)} \quad (2.2)$$

и при условии равновесия [2]:

$$P+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma_{rr}\cos(\beta-\theta)rd\theta=0. \quad (2.3)$$

Если иметь в виду, что каждое из условий непрерывности перемещений из (2.2) приводит к двум независимым условиям относительно произвольных постоянных $A_k^{(i)}(i=1,2;\ k=1,2,3,4)$, т.к. в выражениях для перемещений должны приравниваться к нулю коэффициенты при r^0 и $\ln r$, то получается одиннадцать условий для восьми произвольных постоянных. Следовательно, в общем случае для решения задачи недостаточно функций с логарифмической особенностью (1.4). К ним должны быть добавлены функции со степенной особенностью. Однако полученная система алгебраических уравнений (2.1)–(2.3) имеет решения в частных случаях. В случае $\gamma = 0$ полубесконечная пластинка составлена из двух равных частей, некоторые из граничных условий (2.1), (2.2) удовлетворяются тождественно и для произвольных постоянных получаются следующие соотношения:

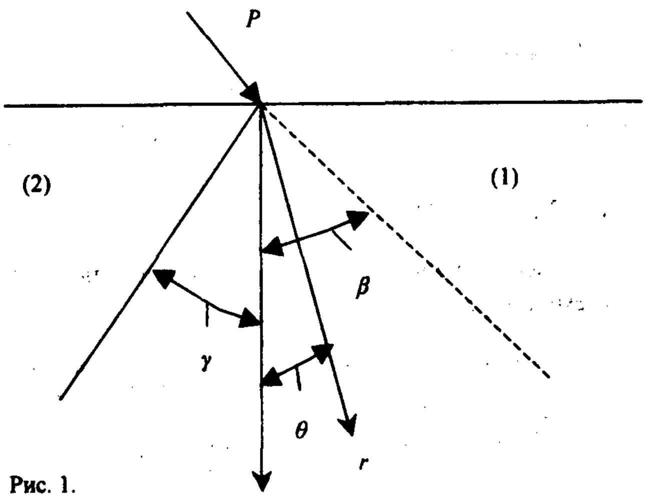

Рис. 1.

$$A_1^{(1)} = -\frac{1-\nu_1}{1+\nu_1} iA_4^{(1)}, \quad A_2^{(1)} = A_4^{(1)}, \quad A_3^{(1)} = \frac{1-\nu_1}{1+\nu_1} iA_4^{(1)},$$
$$A_1^{(2)} = -\frac{1-\nu_2}{1+\nu_1} iA_4^{(1)}, \; A_2^{(2)} = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} A_4^{(1)}, \; A_3^{(2)} = \frac{1-\nu_2}{1+\nu_1} iA_4^{(1)}, \; A_4^{(2)} = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} A_4^{(1)}. \tag{2.4}$$

Таким образом, семь произвольных постоянных из восьми находятся посредством $A_4^{(1)}$, и остается определить $A_4^{(1)}$ из условия (2.3). С учетом (2.4) компоненты напряжений (1.6) определяются следующим образом:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -\frac{2i(1-\nu_1)E_1}{(1+\nu_1)^2 r} e^{i\theta} A_4^{(1)}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{\theta r}^{(1)} = 0,$$
$$\sigma_{rr}^{(2)} = -\frac{2i(1-\nu_2)E_2}{(1+\nu_2)(1+\nu_1)r} e^{i\theta} A_4^{(1)}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(2)} = \sigma_{\theta r}^{(2)} = 0. \tag{2.5}$$

Общие выражения (2.5) являются комплексными функциями, следовательно, постоянная

$$A_4^{(1)} = A + iB\,. \tag{2.6}$$

Из решений (2.5) с учетом (2.6) выбираются действительные решения, удовлетворяющие конкретным условиям равновесия вида (2.3).

В случае, когда сосредоточенная нагрузка вертикальная $(\beta = 0)$, решение (2.5) имеет вид

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{2(1-\nu_1)E_1\cos\theta}{(1+\nu_1)^2 r} B, \qquad \sigma_{rr}^{(2)} = \frac{2(1-\nu_2)E_2\cos\theta}{(1+\nu_2)(1+\nu_1)r} B. \tag{2.7}$$

Постоянная B определяется из условия равновесия (2.3). После определения B для напряжений (2.7) получаются следующие окончательные выражения:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -\frac{4P\cos\theta}{\pi(1+\chi)r}, \qquad \sigma_{rr}^{(2)} = -\frac{4P\cos\theta}{\pi(1+\chi^{-1})r}, \tag{2.8}$$

где

$$\chi = \frac{(1-\nu_2)(1-\nu_1)E_2}{(1+\nu_2)(1+\nu_1)E_1}. \tag{2.9}$$

В случае, когда сосредоточенная нагрузка горизонтальная $(\beta = \pi/2)$, из (2.5) выбирается решение

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{2(1-\nu_1)E_1\sin\theta}{(1+\nu_1)^2 r}A, \qquad \sigma_{rr}^{(2)} = \frac{2(1-\nu_2)E_2}{(1+\nu_2)(1+\nu_1)r}A. \tag{2.10}$$

После определения постоянной A из (2.3) и подстановки в (2.10) получается

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -\frac{4P\sin\theta}{\pi(1+\chi)r}, \qquad \sigma_{rr}^{(2)} = -\frac{4P\sin\theta}{\pi(1+\chi^{-1})r}. \tag{2.11}$$

Суперпозиция решений (2.8) и (2.11) приводит к определению напряжений для сосредоточенной нагрузки при произвольном угле β:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -\frac{4P\cos(\beta-\theta)}{\pi(1+\chi)r}, \qquad \sigma_{rr}^{(2)} = -\frac{4P\cos(\beta-\theta)}{\pi(1+\chi^{-1})r}, \qquad \sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \sigma_{\theta r}^{(i)} = 0. \tag{2.12}$$

Из (2.8), (2.11), (2.12) при $\chi = 1$ получаются известные решения для однородной полубесконечной пластинки [1, 2].

3. Рассмотренный в пункте 2 частный случай ($\gamma = 0$) допускает обобщение для случая симметричного составного клина с произвольным углом расствора 2α (рис. 2). Для данной задачи выражения (2.4) для произвольных постоянных остаются в силе, а условие равновесия (2.3) заменяется условием

$$P + \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \sigma_{rr}\cos(\beta-\theta)\, r\, d\theta = 0. \tag{3.1}$$

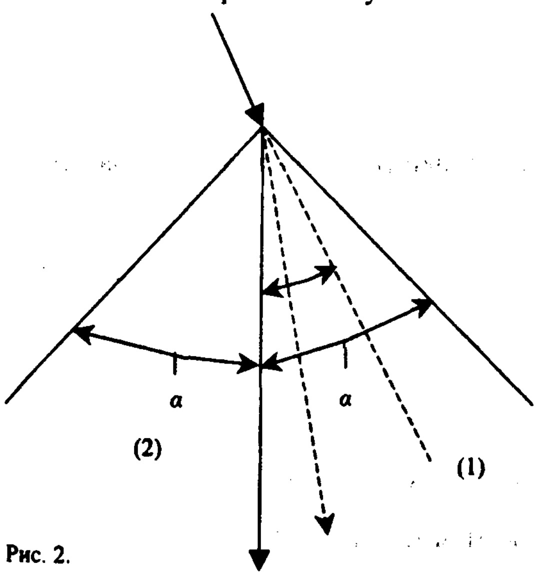

Рис. 2.

Решение задачи получается анологично (2.5)–(2.12). Сначала находится решение для $\beta = 0$, потом для $\beta = \pi/2$ и, наконец, в результате суперпозиции для напряжений определяются следующие выражения:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -\frac{4P}{(1+\chi)r}\left(\frac{\cos\theta\cos\beta}{2\alpha+\sin 2\alpha} + \frac{\sin\beta\sin\theta}{2\alpha-\sin 2\alpha}\right),$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = -\frac{4P}{(1+\chi^{-1})r}\left(\frac{\cos\theta\cos\beta}{2\alpha+\sin 2\alpha} + \frac{\sin\beta\sin\theta}{2\alpha-\sin 2\alpha}\right),$$
$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \sigma_{\theta r}^{(i)} = 0. \tag{3.2}$$

Для однородного клина $(\chi = 1)$ из (3.2) следуют известные результаты [1, 2].

4. Второй частный случай, когда система алгебраических уравнений (2.1)–(2.3) имеет решение, получается при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, но при произвольном угле соединения пластин γ. В этом случае из условий (2.1) и (2.2) семь произвольных постоянных определяются посредством постоянной $A_4^{(1)}$ следующим образом:

$$A_1^{(1)} = -\frac{1-\nu}{1+\nu} i A_4^{(1)}, \qquad A_2^{(1)} = A_2^{(2)} = A_2^{(2)} = A_4^{(1)},$$
$$A_3^{(1)} = \frac{1-\nu}{1+\nu} i A_4^{(1)}, \qquad A_1^{(2)} = -\frac{1-\nu}{1+\nu} i A_4^{(1)}, \qquad A_3^{(2)} = \frac{1-\nu}{1+\nu} i A_4^{(1)}. \tag{4.1}$$

Далее используется аналогичная процедура пункта 2 и окончательное решение получается в виде

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -\frac{4P}{r}\left[\frac{\cos\theta\cos\beta}{\pi(1+\delta)+(2\gamma+\sin 2\gamma)(1-\delta)} + \frac{\sin\theta\sin\beta}{\pi(1+\delta)+(2\gamma-\sin 2\gamma)(1-\delta)}\right],$$
$$\sigma_{rr}^{(2)} = -\frac{4P}{r}\left[\frac{\cos\theta\cos\beta}{\pi(1+\delta^{-1})+(2\gamma+\sin 2\gamma)(1-\delta^{-1})} + \frac{\sin\theta\sin\beta}{\pi(1+\delta^{-1})+(2\gamma-\sin 2\gamma)(1-\delta^{-1})}\right], \tag{4.2}$$

где $\delta = E_2/E_1$.

Из (4.2) в случае однородной пластинки $(\delta = 1)$ получаются известные (напр., в [3]) решения.

Кафедра механики сплошной среды
Поступила 22.09.2004

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лехницкий С.Г.** Анизотропные пластинки. М.: Физматгиз, 1957, 463 с.
2. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975, 872 с.
3. **Саркисян В.С.** Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1983, с. 260.
4. **Белубекян В.М., Белубекян М.В., Терзян С.А.** – Изв. НАН Армении, Механика, 2001, т. 54, № 2, с. 18–21.
5. **Амбарцумян С.А.** Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982, 320с.

Վ. Մ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՍԵՊԻ ԳԱԳԱԹՈՒՄ ԿԵՆՏՐՈՆԱՑՎԱԾ ՈՒԺԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՆԵՐՔՈ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍՆԱՎՈՐ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Իզոտրոպ համասեռ սեպերում կենտրոնացված ուժի ազդեցության դեպքում լարումային-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման խնդիրները բերվում են առաձգականության տեսությանը նվիրված մենագրությունների մեծամասնության մեջ: Նմանատիպ խնդիրների լուծումը անիզոտրոպ սեպերի համար տրված է Ս.Գ. Լեխնիցկու 1957 թ. մենագրության մեջ: Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են բաղադրյալ սեպեր: Ցույց է տրվում, որ ընդհանուր դեպքում տեղափոխությունների լոգարիթմական եզակիությունը ներկայացնող պարզ լուծումները բավարար չեն խնդրի լրիվ լուծման համար: Որոշված է խնդիրների մի մասնակի դաս, որի համար ստացված են անալիտիկ լուծումներ:

V. M. BELUBEKYAN, M. V. BELUBEKYAN

PARTIAL PROBLEMS OF STRESS STATE IN A COMPOSED WEDGE UNDER A CONCENTRATED LOAD AT ITS VERTEX

Summary

Problems of determination of stress-strain state in isotropic homogeneous wedge under concentrated load at the vertex are presented in most of the monographs on theory of elasticity. Solutions of similar problems for anisotropic wedges are presented in monograph by S.G. Lekhnickiy. In the present paper wedges, composed of two homogeneous ones, are considered. It is shown, that the elementary solutions, representing logarithmic singularity of displacements are insufficient for general solution of the problem. A partial class of problems is determined, for which analytic solutions are obtained.