ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,1999 Естественные науки

Механика

УДК 539.3:537.312.62

К.В. ПАПОЯН, А.А. ГЕВОРГЯН, А.Г. ЦАТУРЯН

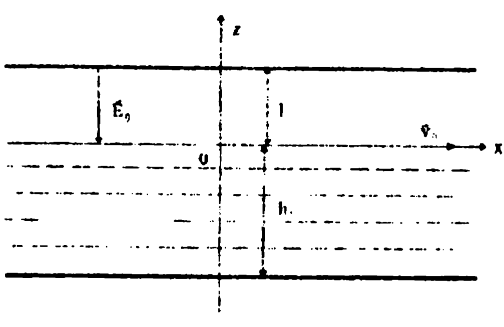
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача об устойчивости поверхностных волн в слое движущейся проводящей жидкости. Найдено дисперсионное уравнение для этих волн и рассмотрены некоторые частные случаи.

1.Вопрос поведения капиллярно-гравитационных волн на поверхности проводящей жидкости во внешнем электрическом поле обсуждался, начиная с тридцатых годов, в связи с их неустойчивостью. В [1] рассматривалась бесконечно глубокая жидкость в однородном электрическом поле, приложенном к поверхности жидкости при волнении на поверхности. В дальнейшем это явление изучалось и в случае жидкости конечной глубины как проводящей, так и диэлектрической среды (см., напр., [2]).

Этот вопрос довольно интенсивно изучался и для случая сверхтекучей жидкости (см., напр., [3]), на поверхности которой могут образоваться отдельные заряженные участки, расположенные с некоторой симметрией и образующие своеобразную кристаллическую структуру. В работе [4] рассматривалось также влияние вязкости на неустойчивость гравитационно-капиллярных волн для случая плоского слоя во внешнем электрическом поле.

В последнее время это явление изучается и для сложных систем [5,6], напр., для растворов поверхностно-активных веществ [6].



В настоящей заметке рассматривается поведение поверхностных волн во внешнем однородном электрическом поле в случае одномерно движущегося слоя вязкой проводящей жидкости глубины h. Скорость на поверхности считается заданной и равной $\vec{v}_0$.

Выберем ось x по направлению движения. Тогда скорость $\vec{v}$ согласно рисунку будет иметь отличные от нуля компоненты v_x, v_z, и уравнения Навье-Стокса для этих компонентов с помощью функции тока запишутся в виде:

$$\partial^2\Psi/\partial z\partial t=-1/\rho\partial p/\partial x+\upsilon\left\{\partial^3\Psi/\partial x^2\partial z+\partial^3\Psi/\partial z^3\right\}-g, \qquad (1)$$

$$\partial^2\Psi/\partial x\partial t=-1/\rho\partial p/\partial z+\upsilon\left\{\partial^3\Psi/\partial x^3+\partial^3\Psi/\partial z^2\partial x\right\},$$

где υ – коэффициент кинематической вязкости, ρ, p – соответственно плотность и давление жидкости.

Исключая из системы (1) давление, в случае решений вида

$$\Psi(x,z,t)=\Psi(z)\exp[i(kx-\omega t)]$$

получаем

$$\Psi(z)=c_1e^{mz}+c_2e^{-mz}+c_3e^{kz}+c_4e^{-kz}, \qquad (2)$$

где положено $m=\sqrt{k^2-i\omega/\upsilon}$.

Электрическое поле потенциально и определяется из следующих соотношений:

$$\vec{E}=-grad\phi,\ \ \phi=\phi_0+\phi_1,$$

причем $\phi_0=-E_0z$, а ϕ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\phi_1=0$$

с граничными условиями

$$\phi_1\big|_{z=l}=0, \qquad \phi_1\big|_{z=0}=-E_0\xi(x,t),$$

где $\xi(x,t)=\xi_0\exp[i(kx-\omega t)]$ есть возмущение поверхности жидкости и, следовательно, $\phi(x,z,t)$ имеет вид

$$\phi(x,z,t)=-E_0z+E_0\xi_0sh[k(z-l)]/sh(kl)\exp[i(kx-\omega t)].$$

2.Граничные условия, с помощью которых определяются неизвестные постоянные, следующие:

a) исчезновение скорости на дне, т.е.

$$v_z\big|_{z=-h}=0, \quad v_x\big|_{z=-h}=0;$$

b) исчезновение касательных напряжений на поверхности жидкости:

$$-v_0\partial\Psi/\partial x\big|_{z=0}+\upsilon\left(\partial^2\Psi/\partial z^2-\partial^2\Psi/\partial x^2\right)\big|_{z=0}=0;$$

c) кинематическое условие на поверхности $z=0$, что есть

$$\partial\xi/\partial t+v_0\partial\xi/\partial x=-\partial\Psi/\partial x\big|_{z=0};$$

d) равенство нулю нормального составляющего полного давления, т.е.

$$-\{p+2i\rho\upsilon k\partial\Psi/\partial z\}_{z=0}+\alpha\partial^2\xi/\partial x^2+E^2/8\pi\big|_{z=0}=0,$$

где последние два слагаемых представляют поверхностные давления и давления со стороны электрического поля. Эти условия для ξ вида $\xi(x,t)=\xi_0\exp[i(kx-\omega t)]$ приводят к системе однородных уравнений относительно неизвестных постоянных. Условие существования нетривиального решения (равенство нулю определителя системы) приводит к следующему равенству, из которого в принципе можно найти функцию $\omega=\omega(k)$ (дисперсионное уравнение):

$$i\rho(v_0-\omega/k)A^{-1}\Big\{\Big[\left(k^2+m^2\right)\upsilon+ikv_0\Big]\Big[\left(k^2+m^2\right)\left(mch(kh)ch(mh)-ksh(kh)sh(mh)\right)-$$
$$-2mk^2\Big]+\Big[2k^2\upsilon+ikv_0\Big]\Big[2mk\left(kch(mh)ch(kh)-msh(mh)sh(kh)\right)-$$
$$-\left(m^2+k^2\right)m\Big]\Big\}+\alpha k^2+\rho g-kE_0^2cth(kh)/4\pi=0, \qquad (3)$$

где α – поверхностное натяжение, а A определяется выражением

$$A=\left(m^2+k^2\right)\left[msh(kh)ch(mh)-kch(kh)sh(mh)\right]. \qquad (4)$$

3.Рассмотрим некоторые частные случаи. Если положить одновременно $\omega\to 0$ и $\upsilon\to 0$ таким образом, что $\omega/\upsilon\to\infty$, то из уравнения (3) получим

$$v_0^2=\left[\alpha k/\rho+g-E_0^2cth(kl)/(4\pi\rho)\right]th(kh). \qquad (5)$$

Условие устойчивости в этом случае сводится к требованию $v_0^2>0$, что эквивалентно

$$\alpha k/\rho+g-E_0^2cth(kl)/(4\pi\rho)>0.$$

Оно совпадает с условием устойчивости поверхностных волн для покоящейся идеальной жидкости [1].

Если положить $v_0 = 0$ и рассматривать вязкую жидкость достаточно большой глубины, т.е. считать $h \to \infty$, то из (3) получаем

$$\left(2k^2 - i\omega/\upsilon\right)^2 + 4k^2\sqrt{k^2 - i\omega/\upsilon} + kg/\upsilon^2 + \alpha k^3/\left(\rho\upsilon^2\right) - \\ - E_0^2 k^2 cth(kl)/\left(4\pi\rho\upsilon^2\right) = 0. \tag{6}$$

Поскольку теперь ω – комплексная величина, то для устойчивости волн требуется, чтобы $\mathrm{Im}\,\omega < 0$.

Полагая $\omega = \omega_1 + i\omega_2$; $\sqrt{k^2 - i\omega/\upsilon} = \rho_0 \exp(i\varphi)$, находим условие устойчивости

$$k^2 - \cos\varphi\sqrt{\left(k^2 + \omega_2/\upsilon\right)^2 + \omega_1^2/\upsilon^2} < 0, \tag{7}$$

где $\cos\varphi$ является положительным решением уравнения

$$k^4 + 2k^2\rho_0\cos\varphi + \rho_0^2\left(2\cos^2\varphi - 1\right) + 2k^2\sqrt{2\rho_0\left(1+\cos\varphi\right)} + f = 0.$$

Из (7) фактически определяется то значение электрического поля, при котором появляется неустойчивость. Отметим также, что уравнение (6) при пренебрежении поверхностного натяжения и отсутствии электрического поля переходит в известное соотношение [5].

Рассмотрим теперь случай, когда $\omega \to 0$, $\upsilon \neq 0$.

Полагая $m = k + \delta$ и разлагая все члены, входящие в (3), в ряд относительно δ и ограничиваясь линейным приближением после простых, но довольно громоздких вычислений, находим для δ выражение

$$\delta = \left\{v_0^2 F_1 - \left(sh^2(kh) - 2kh\right)\left[k\alpha/\rho + g/k - E_0^2 cth(kl)/(4\pi\rho)\right] - 2ikv_0F_2\nu\right\}/ \\ /\left\{8k\upsilon^2\left(ch^2(kh) + k^2h^2\right) - 2v_0\phi_2/3 + iv_0\left[v_0\left(k^2h^2 - ch^2(kh)\right) + 4k\upsilon\phi_1/3\right]\right\}. \tag{8}$$

Разделив вещественную и мнимую части и учитывая, что временная зависимость ξ при этом будет иметь вид $\exp(2\nu k\delta t)$, приходим к выводу, что для устойчивости необходимо выполнение условия $\mathrm{Re}\,\delta < 0$. Оно эквивалентно требованию иметь место неравенству

$$\left\{v_0^2 F_1 - \left(sh^2(kh) - 2kh\right)\left[k\alpha/\rho + g/k - E_0^2 cth(kl)/(4\pi\rho)\right]\right\}\left\{8k\upsilon^2\left(ch^2(kh) + k^2h^2\right) - \right. \\ \left. - 2v_0\phi_2/3\right\} - 2v_0^2 k\upsilon F_2\left[v_0\left(k^2h^2 - ch^2(kh)\right) + 4k\upsilon\phi_1/3\right] > 0, \tag{9}$$

где

$$F_1 = 2k^2h^2, \quad F_2 = 2k^2h^2 + 2ch^2(kh),$$

$$\phi_1 = 12ch^2(kh) + 6khch(kh)sh(kh) + 12k^2h^2, \quad \phi_2 = 3ch^2(kh) + 9k^2h^2 - 3.$$

Из неравенства (9) также определяется то предельное значение электрического поля, вплоть до которого волнение на поверхности жидкости при заданном v_0 имеет устойчивый характер.

Кафедра общей физики *Поступила 08.02.1999*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Френкель Я.И.** – ЖЭТФ, 1936, т.6, в.4, с. 347.
2. **Копейкина Э.К.** – Магнитная гидродинамика, 1970, в.3, с. 142.
3. **Горьков Л.П., Черникова Д.М.** – Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 18, в.2, с.119.
4. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Механика сплошных сред. М.: 1954.
5. **Miskovsky N.M., Gutler P.H., Chung M.** – J.Appl. Phys., 1990, v.68, p. 1475-1482.
6. **Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф, Григорьев А.И.** – ЖТФ, 1998, т.68, в.2, с. 22-29.

Կ.Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ, Ա.Հ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Ա.Գ.ԾԱՏՈՒՐՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՀԵՂՈՒԿ ՇԵՐՏԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Քննարկված է շարժվող հաղորդիչ հեղուկի շերտի մակերևութային ալիքների կայունության մասին խնդիրը: Այդ ալիքների համար գտնվել է դիսպերսիոն հավասարումը և դիտարկվել են մի շարք մասնավոր դեպքեր: