

УДК 539.3

В. С. САРКИСЯН, Б. П. ГЕГАМЯН, Г.Р. САРДАРЯН

**ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ АНИЗОТРОПНЫХ КРУГОВЫХ
 ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ
 СДВИГОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ**

В работе исследуется задача оптимизации формы анизотропных круговых цилиндрических оболочек с учетом поперечных сдвиговых напряжений. При конкретной численной реализации рассматривается однородная осесимметричная ортотропная оболочка.

Рассмотрим задачу оптимизации формы однородных анизотропных круговых цилиндрических оболочек с учетом гипотезы уточненной теории оболочек С. А. Амбарцумяна [1].

Задача формулируется следующим образом: необходимо найти функцию $h(\alpha, \beta)$, описывающую распределение толщины оболочки, при которой минимизируется масса оболочки, при этом основная частота свободных колебаний оболочки принимает наперед заданное значение ω_0 , а края оболочки $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ оперты шарнирно:

$$T_1 = M_1 = S_1 = \dot{H}_1 = w = 0. \tag{1}$$

Свободные колебания анизотропной однородной цилиндрической оболочки переменной толщины описываются с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} &L_{11}(C_{ij})[u] + L_{12}(C_{ij})[v] + L_{13}(C_{ij}, D_{ij})[w] + L_{14}(D_{ij})[\Phi_1] + \\ &+ L_{15}(D_{ij})[\Phi_2] + L_{16}[h, C_{ij}, D_{ij}, u, v, w, \Phi_1, \Phi_2] = -\rho_0 \omega^{-2} hu, \\ &L_{21}(C_{ij})[u] + L_{22}(C_{ij})[v] + L_{23}(C_{ij}, D_{ij})[w] + L_{24}(D_{ij}, a_{ij})[\Phi_1] + \\ &+ L_{25}(D_{ij}, a_{ij})[\Phi_2] + L_{26}[h, C_{ij}, D_{ij}, u, v, w, \Phi_1, \Phi_2] = -\rho_0 \omega^{-2} hv, \\ &L_{31}(C_{ij})[u] + L_{32}(C_{ij})[v] + L_{33}(C_{ij}, D_{ij})[w] + L_{34}(D_{ij}, a_{ij})[\Phi_1] + \\ &+ L_{35}(D_{ij}, a_{ij})[\Phi_2] + L_{36}(D_{ij}, a_{ij}, \Phi_1, \Phi_2)[h] = \rho_0 \omega^{-2} hw, \\ &L_{41}(D_{ij})[u] + L_{42}(D_{ij})[v] + L_{43}(D_{ij})[w] + L_{44}(D_{ij}, a_{ij})[\Phi_1] + \\ &+ L_{45}(D_{ij}, a_{ij})[\Phi_2] + L_{46}[h, D_{ij}, u, v, w, \Phi_1, \Phi_2] = 0, \\ &L_{51}(D_{ij})[u] + L_{52}(D_{ij})[v] + L_{53}(D_{ij})[w] + L_{54}(D_{ij}, a_{ij})[\Phi_1] + \end{aligned} \tag{2}$$

* Здесь и в дальнейшем приняты обозначения работ [1,3].

$$+L_{55}(D_{ij}, a_{ij})[\Phi_2] + L_{56}[h, D_{ij}, u, v, w, \Phi_1, \Phi_2] = 0,$$

где $\bar{\omega}$ - частота свободных колебаний оболочки, L_i - дифференциальные операторы.

Исходя из принципов вариационного исчисления [2], получаем систему из 11 нелинейных дифференциальных уравнений с 11-тью неизвестными $h, u, v, w, \Phi_1, \Phi_2, f_1, \dots, f_5$, где f_1, \dots, f_5 - неопределенные функции.

При конкретной численной реализации задачи рассматривается однородная осесимметричная ортотропная (когда главные оси анизотропии совпадают с главными геометрическими осями оболочки) оболочка, т.е. $B_{16} = B_{26} = 0$. В этом случае система дифференциальных уравнений разлагается на две независимые системы: в одну входят только $u, w, \Phi_1, h, f_1, f_3, f_4$, а в другую - функции v, Φ_2, h, f_2, f_5 .

Выпишем уравнения указанных систем для первой группы переменных:

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{du}{d\alpha} - \frac{kh^3 d^2 w}{12 d\alpha^2} + \frac{kh^5 d\Phi_1}{120 d\alpha} + \frac{kh^4 \Phi_1 dh}{48 d\alpha} \right) + B_{12} \frac{d}{d\alpha} (khw) &= -\rho\omega^2 hu, \\ B_{12} kh \frac{du}{d\alpha} + B_{22} k^2 hw - \frac{1}{12 a_{55}} \frac{d}{d\alpha} (h^3 \Phi_1) &= \rho\omega^2 hw, \\ B_{11} \left[\frac{k}{12 d\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(h^3 \frac{du}{d\alpha} \right) - \frac{1}{12 d\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(h^3 \frac{d^2 w}{d\alpha^2} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{120 d\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(h^5 \frac{d\Phi_1}{d\alpha} \right) + \frac{1}{48 d\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(h^4 \Phi_1 \frac{dh}{d\alpha} \right) \right] = \frac{h^3 \Phi_1}{12 a_{55}} \\ B_{11} \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{df_1}{d\alpha} + \frac{kh^3}{12} \frac{df_4}{d\alpha} \right) - B_{12} \frac{d}{d\alpha} (khf_3) &= -\rho\omega f_1, \\ B_{11} \left[\frac{k}{12} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(h^3 \frac{df_1}{d\alpha} \right) + \frac{1}{12} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(h^3 \frac{df_4}{d\alpha} \right) \right] - B_{12} kh \frac{df_1}{d\alpha} + B_{22} k^2 hf_3 &= \rho\omega^2 hf_3, \\ B_{11} \left[-\frac{kh^4}{48} \frac{dh}{d\alpha} \frac{df_1}{d\alpha} + \frac{k}{120} \frac{d}{d\alpha} \left(h^5 \frac{df_1}{d\alpha} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{120} \frac{d}{d\alpha} \left(h^5 \frac{df_4}{d\alpha} \right) - \frac{h^4}{48 d\alpha} \frac{dh}{d\alpha} \frac{df_4}{d\alpha} \right] = \frac{h^3}{12 a_{55}} \left(f_4 - \frac{df_3}{d\alpha} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В этом случае условие оптимальности принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} B_{11} \left(-\frac{du}{d\alpha} \frac{df_1}{d\alpha} + \frac{kh^2 d^2 w}{4 d\alpha^2} \frac{df_1}{d\alpha} - \frac{kh^4}{48} \frac{d\Phi_1}{d\alpha} \frac{df_1}{d\alpha} + \frac{kh^4 \Phi_1}{48} \frac{d^2 f_1}{d\alpha^2} \right) - B_{12} kw \frac{df_1}{d\alpha} + \rho\omega^2 uf_1 + \\ + B_{12} k \frac{du}{d\alpha} f_3 + B_{22} k^2 wf_3 + \frac{h^2 \Phi_1 df_3}{4 a_{55} d\alpha} - \rho\omega^2 wf_3 + \\ + B_{11} \left[-\frac{kh^2}{4} \frac{du}{d\alpha} \frac{df_4}{d\alpha} + \frac{h^2}{4} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} \frac{df_4}{d\alpha} - \frac{h^4}{48} \frac{d\Phi_1}{d\alpha} \frac{df_4}{d\alpha} + \frac{h^4 \Phi_1}{48} \frac{d^2 f_4}{d\alpha^2} \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{h^2 \Phi_1}{4a_{55}} f_4 + 1 + \Lambda \frac{d^2 h}{d\alpha^2} = 0, \quad (5)$$

где Λ - множитель Лагранжа, который определяется из изопериметрического ограничения

$$\int_0^l \left(\frac{dh}{d\alpha} \right)^2 d\alpha \leq C_0, \quad (6)$$

$C_0 = const$, заданное число.

Граничные условия (1) в этом случае принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} T_1 &= B_{11} \left(h \frac{du}{d\alpha} - \frac{kh^3 d^2 w}{12 d\alpha^2} + \frac{kh^5 d\Phi_1}{120 d\alpha} + \frac{kh^4 \Phi_1}{48} \frac{dh}{d\alpha} \right) = 0 \text{ при } \alpha = 0, \alpha = 1, \\ M_1 &= B_{11} \left(\frac{kh^3 du}{12 d\alpha} - \frac{h^3 d^2 w}{12 d\alpha^2} + \frac{h^5 d\Phi_1}{120 d\alpha} + \frac{h^4 \Phi_1}{48} \frac{dh}{d\alpha} \right) = 0 \text{ при } \alpha = 0, \alpha = 1, \\ w(\alpha) &= 0 \text{ при } \alpha = 0, \alpha = 1, \end{aligned} \quad (7)$$

а функции f_1, f_3, f_4 удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} h \frac{df_1}{d\alpha} + \frac{kh^3}{12} \frac{df_4}{d\alpha} &= 0 \text{ при } \alpha = 0, \alpha = 1, \\ \frac{kh^3}{12} \frac{df_1}{d\alpha} + \frac{h^3}{12} \frac{df_4}{d\alpha} &= 0 \text{ при } \alpha = 0, \alpha = 1, \\ \frac{h^5}{120} \left(k \frac{df_1}{d\alpha} + \frac{df_4}{d\alpha} \right) &= 0 \text{ при } \alpha = 0, \alpha = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Оказывается, что из краевой задачи (3) - (8) можно исключить функции w и f_3 .

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{h^2}{12a_{55}} \frac{d\Phi_1}{d\alpha} + \frac{h\Phi_1}{4a_{55}} \frac{dh}{d\alpha} - B_{12} k \frac{du}{d\alpha} \right) / (B_{22} k^2 - \rho \omega^2), \\ f_3 &= \left\{ B_{12} k h \frac{df_1}{d\alpha} - B_{11} \left[\frac{k}{12} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(h^3 \frac{df_1}{d\alpha} \right) + \frac{1}{12} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(h^3 \frac{df_4}{d\alpha} \right) \right] \right\} / (B_{22} h k^2 - \rho h \omega^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, задача приводится к системе нелинейных уравнений относительно функций u, Φ_1, h, f_1, f_4 . Для интегрирования полученной краевой задачи применим метод малого параметра [3].

Искомые функции ищутся в следующем виде:

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(\alpha) \epsilon^i, \dots, f_4 = \sum_{i=0}^{\infty} f_{4i}(\alpha) \epsilon^i, \quad (10)$$

где $0 < \epsilon < 1$ - малый физический параметр. Подставляя (10) в полученную систему и уравнивая коэффициенты соответствующих степеней ϵ , получим рекуррентные системы линейных краевых задач.

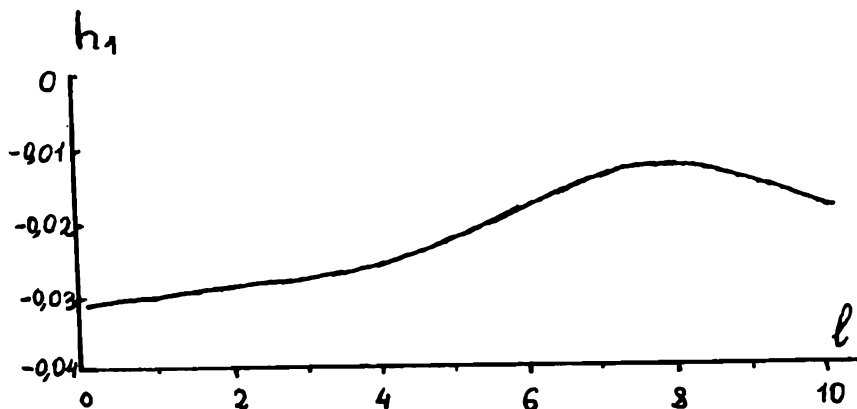


График функции h_1 , характеризующий оптимальное распределение толщины оболочки.

Решение первой краевой задачи рекуррентной системы имеет следующий вид:

$$u_0 = A \cos \frac{\pi\alpha}{l}, \quad \Phi_1^0 = B a_{55} \cos \frac{\pi\alpha}{l}, \quad f_1^0 = C \cos \frac{\pi\alpha}{l}, \quad f_4^0 = D \cos \frac{\pi\alpha}{l}, \quad (11)$$

где постоянные коэффициенты A и B (а также C и D) связаны между собой так, что определяют решение (11) с точностью множителя.

Полученные выражения (11) подставим во вторую краевую задачу. Таким образом, во второй задаче останутся только неизвестные $h_1, u_1, \Phi_1^1, f_1^1, f_4^1$. Для решения этой краевой задачи применяется конечно-разностный метод [4], с помощью которого система дифференциальных уравнений приводится к системе алгебраических уравнений.

С использованием симметричности оболочки в точке $\alpha = \frac{l}{2}$ полученная алгебраическая система для конкретного случая оболочки решена на ЭВМ. График функции h_1 , характеризующий оптимальное распределение толщины, приведен на рисунке при следующих параметрах:

$$\begin{aligned} E_1 &= 5,7 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad E_2 = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \nu_1 = 0,068 \\ G_{12} &= G_{13} = 5,75 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad G_{23} = 5,0 \cdot 10^9 \text{ Па}, \\ h_0 &= 0,001 \text{ м}, \quad R = 0,4 \text{ м}, \quad l = 0,2 \text{ м} \end{aligned} \quad (12)$$

и при $A = 1,2 \cdot 10^{-12}$, $B = 1$, $C = -1,7 \cdot 10^{-2}$, $D = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974, 448 с.
2. Бавичук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980, 256 с.
3. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1976, 536 с.
4. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971, 552 с.

**ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՁԵՎԻ
ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ ՍԱՀՔԻ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱԹՈՒՄՈՎ**

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում հետազոտել ենք անհիզոտորոպ շրջանային գլանային թաղանթի օպտիմալության խնդիրը, հաշվի առնելով լայնական սահքի լարումները: Կոնկրետ թվային հաշվարկի դեպքում դիտարկվում է համասեռ օրթոտրոպ առանցքասիմետրիկ փակ շրջանային գլանային թաղանթ: