

УДК 539.3

В.С.САРКИСЯН, Б.П.ГЕГАМЯН, Э.Ш.САЛЕХ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
 АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С УДЛИНЕННЫМ ПРОФИЛЕМ

Многочисленные исследования посвящены плоской задаче теории упругости анизотропного тела, среди которых особое место занимают работы Д.И.Шермана, С.Г.Лехницкого, Г.Н.Савина, С.Г.Михлина, Г.Б.Колчина и др.

Здесь рассматривается плоская задача теории упругости однородного и неоднородного тела, обладающего криволинейной анизотропией, когда область поперечного сечения удлиненная. Предложен метод решения задачи. Рассмотрены конкретные задачи.

§1. Однородное анизотропное тело. Рассмотрим однородное тело, обладающее криволинейной анизотропией (в каждой точке упругого тела существует одна плоскость упругой симметрии, совпадающая с областью поперечного сечения). Предположим, что тело работает в таких условиях, которые позволяют применять допущения плоской задачи теории упругости [1,2]. Рассмотрим случай, когда поперечное сечение тела удлиненное. Выберем криволинейную систему координат (s,n,z). Таким образом, как и в работе [1], уравнения равновесия и совместности плоской задачи, написанные в этих координатах, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial s} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} (H^2 \sigma_{12}) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} (H \sigma_{22}) - \sigma_{11} \frac{\partial H}{\partial n} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial n^2} (H^2 e_{11}) - \frac{1}{H} \frac{\partial e_{22}}{\partial s} \frac{\partial H}{\partial s} - \left[H \frac{\partial e_{22}}{\partial n} + \frac{2 \partial}{\partial n} (H^2 e_{11}) \right] + \\ + 2 \left(\frac{\partial H}{\partial n} \right)^2 e_{11} = 2 \left[\frac{\partial^2}{\partial s \partial n} (H e_{12}) - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial s} \frac{\partial}{\partial n} (H e_{12}) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Вводя функцию напряжений F(s,n)

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial n^2},$$

имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial s} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial F}{\partial n}, \\ \sigma_{12} &= - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial n} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial F}{\partial s}. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя закон Гука

$$\begin{aligned} e_{11} &= \beta_{11}^0 \sigma_{11} + \beta_{12}^0 \sigma_{22} + \beta_{16}^0 \sigma_{12}, \\ e_{22} &= \beta_{12}^0 \sigma_{11} + \beta_{22}^0 \sigma_{22} + \beta_{26}^0 \sigma_{12}, \\ e_{12} &= \beta_{16}^0 \sigma_{11} + \beta_{26}^0 \sigma_{12} + \beta_{66}^0 \sigma_{12}, \end{aligned} \quad (4)$$

получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\Pi[F] = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi[F] \equiv & \frac{\beta_{22}^0}{H^2} \frac{\partial^4}{\partial s^4} - \frac{2\beta_{26}^0}{H} \frac{\partial^4}{\partial s^3 \partial n} + \left(2\beta_{12}^0 + \beta_{66}^0 \right) \frac{\partial}{\partial s^2 \partial n^2} - \\ & - 2H\beta_{16}^0 \frac{\partial^4}{\partial s \partial n^3} + \beta_{11}^0 H^2 \frac{\partial^4}{\partial n^4} + \lambda_1 \frac{\partial^3}{\partial s^3} + \lambda_2 \frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial n} + \lambda_3 \frac{\partial^3}{\partial s \partial n^2} + \lambda_4 \frac{\partial^3}{\partial n^3} + \\ & + \lambda_5 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \lambda_6 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \lambda_7 \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \lambda_8 \frac{\partial}{\partial s} + \lambda_9 \frac{\partial}{\partial n}, \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{H^2} \left[K(s)\beta_{26}^0 - \frac{3n}{H} \beta_{22}^0 \frac{dK}{ds} \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{H^2} \left[6n\beta_{26}^0 \frac{dK}{ds} - (2\beta_{12}^0 + \beta_{66}^0)HK(s) \right],$$

$$\lambda_3 = -\frac{n}{H} (2\beta_{12}^0 + \beta_{66}^0) \frac{dK(s)}{ds},$$

$$\lambda_4 = -2\beta_{11}^0 HK(s),$$

$$\begin{aligned} \lambda_5 = & \frac{1}{H^4} \left\{ \beta_{22}^0 \left[15n^2 \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 - 4nH \frac{d^2 K}{ds^2} + 2H^2 K^2 \right] + 2\beta_{26}^0 H \frac{dK}{ds} (2H - 5nK) + \right. \\ & \left. + (2\beta_{12}^0 + \beta_{66}^0) H^2 K^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{H^2} \left\{ (2\beta_{12}^0 + \beta_{66}^0)(nK - H) \frac{dK}{ds} + 2 \left[3n^2 \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 - 2K^2 H \right] \beta_{26}^0 \right\},$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{H} \left[\beta_{26}^0 K \left(n \frac{dK}{ds} - H \right) - K^2 H^2 \beta_{22}^0 + \beta_{16}^0 (nK - H) \frac{dK}{ds} \right],$$

$$\begin{aligned} \lambda_8 = & \frac{\beta_{26}^0}{H^4} \left[2H^2 \frac{d^2 K}{ds^2} - 15nH \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 - 6n^2 K \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 + 2(HK + 1)HK \frac{dK}{ds} \right] + \\ & + \frac{\beta_{22}^0}{H^5} \left[n \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 (9n^2 \frac{dK}{ds} + H) + nH \frac{d^2 K}{ds^2} (H - 9nK) + KH^2 \frac{dK}{ds} (H - 3nK) \right] + \\ & + \frac{1}{H^3} \left[2K \frac{dK}{ds} (H - nK) (2\beta_{12}^0 + \beta_{66}^0) \right] - \frac{2K^3}{H^2} \beta_{16}^0, \end{aligned}$$

$$\lambda_9 = \frac{1}{H^2} \left[K \frac{dK}{ds} (nK - H) (\beta_{66}^0 - \beta_{26}^0) + \left(nK^3 + \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{nK}{H} \right) n\beta_{22}^0 \right]$$

(обозначения $K(s)$, $H(s, n)$ приведены в работе [1]).

Общее решение уравнения (5) получим с достаточной точностью, если применим метод малого параметра. Для удлиненных областей можем вводить параметр λ аналогично работе [1].

Тогда будем иметь

$$F(s, \eta) = F_0(s, \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(s, \eta) \lambda^i. \quad (6)$$

Из (5), (6) получаем следующую систему рекуррентных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} A_0 [F_0] &= 0, \\ A_0 [F_1] + A_1 [F_0] &= 0; \\ A_0 [F_2] + A_1 [F_1] + A_2 [F_0] &= 0, \\ \dots & \\ A_0 [F_j] + A_1 [F_{j-1}] + \dots + A_j [F_0] &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \beta_{11}^0 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}, \\ A_1 &= 2p_1(s) \left[\beta_{11}^0 K(s) \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} - \beta_{16}^0 \frac{\partial^4}{\partial s \partial \eta^3} - \beta_{22}^0 K^2(s) r_0(s) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right], \\ A_2 &= 2\beta_{11}^0 K(s) p_2(s, \eta) \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} - 2\beta_{16}^0 \left[p_2(s, \eta) \frac{\partial^4}{\partial s \partial \eta^3} + q_2(s) \frac{dK}{ds} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] - \\ &\quad - 2\beta_{26}^0 K(s) q_2(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (2\beta_{12}^0 + \beta_{66}^0) q_2 \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial \eta^2} - K^2 \beta_{22}^0 (r_0 p_2 + r_1 p_1) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\ A_j &= 2\beta_{11}^0 K(s) p_j \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} - 2\beta_{16}^0 \left[p_j \frac{\partial^4}{\partial s \partial \eta^3} - \frac{dK}{ds} (K m_j - q_j) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + K^3 D_j \frac{\partial}{\partial s} \right] - \\ &\quad - (2\beta_{12}^0 + \beta_{66}^0) \left\{ q_j \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial \eta^2} + m_j \left[K \frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial \eta} - \frac{dK}{ds} \right] \frac{\partial^3}{\partial s \partial \eta^2} + K^3 D_j \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \right. \\ &\quad \left. - K \frac{dK}{ds} \left[(K D_j - m_j) \frac{\partial}{\partial \eta} + (2D_j - 3K L_j) \frac{\partial}{\partial s} \right] \right\} - 2\beta_{26}^0 \left\{ m_j \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial \eta} - \right. \\ &\quad \left. - D_j \left[K \frac{\partial^3}{\partial s^3} + 3 \frac{dK}{ds} \frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial \eta} \right] - K \left[2D_j - 5L_j \frac{dK}{ds} \right] \frac{\partial^2}{\partial s^2} - K \left[m_j \frac{dK}{ds} + q_j \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[2K^2 m_j - 3D_j \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial s \partial \eta} - \left[D_j \frac{d^2 K}{ds^2} - \frac{15}{2} L_j \frac{dK}{ds} + K^2 D_j + 3K \frac{dK}{ds} D_j - \right. \right. \\ &\quad \left. - 3K M_j \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s} \right\} + \beta_{22}^0 \left\{ D_j \frac{\partial^4}{\partial s^4} - 6L_j \frac{dK}{ds} \frac{\partial^3}{\partial s^3} + \left[2K^2 D_j - 4L_j \frac{d^2 K}{ds^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 15M_j \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial s^2} - K^2 (r_0 p_j + \dots + r_{j-1} p_1) q_j \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{dK}{ds} (2m_j - K D_j) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \frac{\partial^2}{\partial s \partial \eta} + \left[D_j \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 + K \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 L_j + K^3 m_j \right] \frac{\partial}{\partial \eta} + \left[(L_j - 9K M_j) \frac{d^2 K}{ds^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{dK}{ds} \left[K D_j + \left(\frac{dK}{ds} \right) M_j + 9 \left(\frac{dK}{ds} \right)^2 N_j \right] \right] \frac{\partial}{\partial s} \left. \right\}. \end{aligned}$$

В зависимости от порядка малого параметра необходимо взять в ряде (6) больше или меньше членов, чтобы обеспечить требуемую точность.

Общее решение первого уравнения системы (7) имеет вид

$$F_0(s, \eta) = \frac{c_1^0(s)}{6} \eta^3 + \frac{c_2^0(s)}{2} \eta^2 + c_3^0(s) + c_4^0(s), \quad (8)$$

где $c_i^0(s)$ - постоянные интегрирования ($i=1, 4$).

Из второго уравнения системы (7) получим

$$F_1(s, \eta) = \frac{1}{\beta_{11}^0} \left[\frac{1}{120} M_1(s) \eta^5 + \frac{1}{24} M_2(s) \eta^4 + \frac{1}{6} c_1^1(s) \eta^3 + c_2^1(s) \frac{\eta^2}{2} + c_3^1(s) \eta + c_4^1(s) \right], \quad (9)$$

где

$$M_1(s) = 12\beta_{22}^0 p_1(s) K^2(s) r_0(s) c_1^0(s),$$

$$M_2(s) = -2p_1(s) \left[6\beta_{11}^0 K c_1^0 - 6\beta_{16}^0 \frac{dc_1^0}{ds} - 2\beta_{22}^0 K^2 r_0(s) c_2^0(s) \right].$$

А из третьего уравнения системы (7) с учетом выражений (8), (9) получим функцию $F_2(s, \eta)$:

$$F_2(s, \eta) = \frac{1}{\beta_{11}^0} \left[\frac{1}{840} M_3 \eta^7 + \frac{1}{300} M_4 \eta^6 + \frac{1}{120} M_5 \eta^5 + \frac{1}{24} M_6 \eta^4 + \frac{1}{6} c_1^2(s) \eta^3 + \frac{1}{2} c_2^2(s) \eta^2 + c_3^2(s) \eta + c_4^2(s) \right],$$

где

$$M_3(s) = 2\beta_{26}^0 K q_2 \frac{d^2 c_1^0}{ds^2} + \frac{1}{3} \beta_{22}^0 K r_0 M_1 p_1,$$

$$M_4(s) = 2\beta_{26}^0 K q_2 \frac{d^2 c_2^0}{ds^2} + \beta_{22}^0 K^2 r_0 M_2 p_1 - p_1 K M_1 + \beta_{16}^0 p_1 \frac{dM_1}{ds},$$

$$M_5(s) = 2\beta_{26}^0 K q_2 \frac{d^2 c_3^0}{ds^2} + 12\beta_{16}^0 \frac{dK}{ds} c_1^0 + 6q_2 (2\beta_{12}^0 + \beta_{66}^0) \frac{d^2 c_1^0}{ds^2} +$$

$$+ 6K^2 \beta_{22}^0 r_0 p_2 c_1^0 - 2p_1 M_2 + 2\beta_{16}^0 p_1 \frac{dM_2}{ds} + 5p_2 \frac{dc_1^0}{ds} + \beta_{22}^0 K^2 r_0 c_1^1,$$

$$M_6(s) = 2\beta_{26}^0 K q_2 \frac{d^2 c_1^0}{ds^2} + 9\beta_{16}^0 q_2 \frac{dK}{ds} c_2^0 + 2q_2 (2\beta_{12}^0 + \beta_{66}^0) \frac{d^2 c_2^0}{ds^2} +$$

$$+ 2K^2 \beta_{22}^0 r_1 p_1 c_2^0 - 3p_1 c_1^1 + 2\beta_{16}^0 \frac{dc_1^1}{ds} p_1 + 2\beta_{22}^0 K r_0 p_1 c_2^1.$$

С такой последовательностью можно найти все остальные приближения $F_3(s, \eta)$, $F_4(s, \eta)$, Неизвестные постоянные интегрирования $c_i^n(s)$

($i=1, 4$, $n=0, 1, 2, \dots$) определяются из конкретных условий.

Рассмотрим некоторые конкретные случаи краевых условий.

1. Пусть имеем двумерную область, которая представляет собой секторную часть кольца (рис.1).

Предположим, что на краях $\eta=0$, $\eta=1$ заданы нормальные и касательные напряжения, а края $s=0$, $s=1$ свободны:

$$\left. \sigma_{ss} \right|_{s=0, s=1} = 0, \quad \left. \sigma_{nn} \right|_{\eta=0} = a_0, \quad \left. \sigma_{nn} \right|_{\eta=1} = \frac{K a_0 s}{[1 + \lambda h K]^2}, \quad \left. \sigma_{sn} \right|_{s=0, s=1} = 0,$$

$$\left. \sigma_{sn} \right|_{\eta=0} = K a_0 s, \quad \left. \sigma_{sn} \right|_{\eta=1} = \frac{K a_0 s}{[1 + \lambda h K]^2}. \quad (11)$$

(в этих формулах $H = [1 + \lambda h(s, \lambda) K(s) \eta]$, для кольцевого сектора $h(s, \lambda)$, $K(s) = \text{Const}$).

Напряжения σ_{ss} , σ_{nn} , σ_{sn} разложим в ряд по степеням малого параметра λ :

$$\sigma_{xy} = (\sigma_{xy})_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_{xy} \lambda^l \quad (x=s,n; y=s,n) \quad (12)$$

где функции $(\sigma_{ss})_l$, $(\sigma_{nn})_l$, $(\sigma_{sn})_l$ связаны с функциями $F_l(s, \eta)$ формулами (3), так что функции $F_0(s, \eta)$, $F_1(s, \eta)$ будут удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 F_0}{\partial n^2} \right|_{s=0, s=1} &= 0, \quad \left[\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial F_0}{\partial s} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial F_0}{\partial n} \right]_{\eta=0} = a_0; \\ \left[\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F_0}{\partial s} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial F_0}{\partial n} \right]_{\eta=1} &= \frac{a_0}{[1 + \lambda h K]^2}, \\ \left[-\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F_0}{\partial s} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial F_0}{\partial n} \right]_{(s=0, s=1)} &= 0, \\ \left[-\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F_0}{\partial s} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial F_0}{\partial n} \right]_{\eta=0} &= Ka_0 s, \\ \left[-\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F_0}{\partial s} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial F_0}{\partial n} \right]_{\eta=1} &= \frac{Ka_0 s}{[1 + \lambda h K]^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Нетрудно убедиться в том, что функции

$$F_0(s, \eta) = \frac{a_0}{2} s^2, \quad F_1 = 0.$$

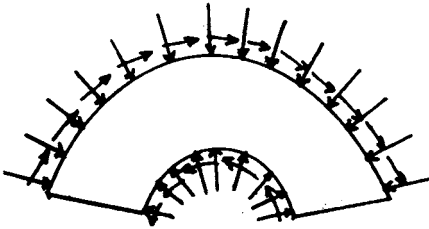


Рис. 1.

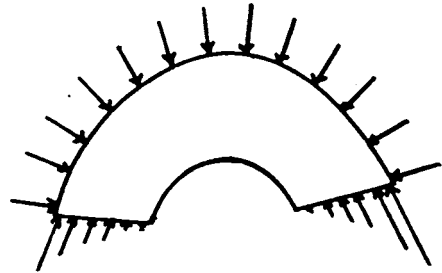


Рис. 2.

Функция напряжений и компоненты тензора напряжений получаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} F &= \frac{a_0}{2} s^2, \\ \sigma_{ss} &= 0, \quad \sigma_{nn} = \frac{a_0}{H^2} \text{Const}, \quad \sigma_{sn} = \frac{Ka_0 s}{H^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

из которых видно, что напряжения (при нагружении рис.1) не зависят от материала и лишь σ_{sn} является переменной, которая свое максимальное значение получает в точке $s=1$: $(\sigma_{sn})_{\max} = Ka_0 l$.

2. Теперь рассмотрим краевое нагружение двумерной кольцевой

области, которое представлено на рис.2.

В этом случае имеем следующие краевые условия:

$$\left[(\sigma_{ss})_0 = -\frac{\partial^2 F_0}{\partial n^2} \right]_{s=0} = \frac{c_0}{\lambda^2 h^2 (O/\lambda)}, \quad \left[(\sigma_{nn})_0 = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F_0}{\partial s} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial F_0}{\partial n} \right]_{\eta=0} = 0,$$

$$(\sigma_{nn})_0 \Big|_{\eta=1} = \frac{Kc_0}{\lambda h [1 + \lambda h K]}, \quad \left[(\sigma_{nn})_0 = -\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F_0}{\partial n} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial F_0}{\partial n} \right]_{\eta=0} = 0,$$

$$(\sigma_{nn})_0 \Big|_{\eta=1} = 0, \quad (\sigma_{ss})_1 \Big|_{s=0} = \frac{N_1(0)}{2\lambda^2 h^2 \beta_{11}^0}, \quad (\sigma_{ss})_1 \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (\sigma_{nn})_1 \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (15)$$

$$(\sigma_{ss})_1 \Big|_{s=0} = 0, \quad (\sigma_{ss})_1 \Big|_{s=1} = 0, \quad (\sigma_{nn})_1 \Big|_{\eta=1} = \frac{K}{6\lambda h \beta_{11}^0 [1 + \lambda h K]} N_1(s),$$

$$(\sigma_{ss})_0 \Big|_{s=0} = 0, \quad (\sigma_{ss})_0 \Big|_{s=1} = 0, \quad (\sigma_{ss}) \Big|_{s=1} = \frac{N_1(1)}{2\lambda^2 h^2 \beta_{11}} \eta^2.$$

Решение краевых задач будет

$$F_0 = \frac{c_0}{2} \eta^2, \quad F_1 = \frac{1}{24\beta_{11}^0} N_1(s) \eta^4, \quad F_2 = \frac{1}{24\beta_{11}^0} \left[\frac{1}{15} \eta^6 N_2 + \frac{1}{5} \eta^5 N_2 + N_4 \eta^4 \right], \quad (16)$$

и, следовательно, получим следующее распределение напряжений:

$$\sigma_{ss} = \frac{1}{\lambda^2 h^2 (s, \lambda)} \left[c_0 + \frac{1}{2\beta_{11}^0} N_1 \eta^2 + \frac{\lambda^2}{12\beta_{11}^0} \left(N_2 \eta^4 + 2N_3 \eta^3 + 6N_4 \eta^2 \right) \right],$$

$$\sigma_{nn} = \frac{K}{\lambda h (s, \lambda) H} \left[c_0 \eta + \frac{\lambda}{6\beta_{11}^0} N_1 \eta^3 + \frac{\lambda^2}{24\beta_{11}^0} \left(\frac{2}{5} N_2 \eta^5 + N_3 \eta^4 + 4N_4 \eta^3 \right) \right],$$

$$\sigma_{nn} = 0. \quad (17)$$

Конкретный численный расчет показывает быструю сходимость рядов (12).

В табл.1 приведены максимальные значения напряжений при точности рядов (12) $O(\lambda)$ и $O(\lambda^2)$. Как видно, наибольшие отклонения соответственно - 0,36% и 0,08%.

Таблица 1

Анизотропный однородный случай, $\bar{\beta}_{1j}^0 = 10^{-1} \beta_{1j}^0 \text{ Па}$	$ \sigma_{ss} ^{\max} \cdot 10^{-5} \text{ Па}$		$ \sigma_{nn} ^{\max} \cdot 10^{-5} \text{ Па}$	
	$O(\lambda)$	$O(\lambda^2)$	$O(\lambda)$	$O(\lambda^2)$
$\bar{\beta}_{11}^0 = 1.4, \bar{\beta}_{22}^0 = 0.9$	2.0525	2.049	0.1834	0.1833
$\bar{\beta}_{11}^0 = 0.9, \bar{\beta}_{22}^0 = 1.4$	2.122	2.115	0.1855	0.1853
$\bar{\beta}_{11}^0 = 2.2, \bar{\beta}_{22}^0 = 1.3$	2.0457	2.043	0.1832	0.1831
$\bar{\beta}_{11}^0 = 1.3, \bar{\beta}_{22}^0 = 2.2$	2.1398	2.132	0.186	0.1858
Изотропный однородный случай, $\beta_{11}^0 = \beta_{22}^0$	2.08	2.075	0.1842	0.184

Приведенные в табл.1 результаты показывают, что когда $\beta_{11}^0 > \beta_{22}^0$, то максимальные значения напряжений σ_{ss} , σ_{nn} меньше соответствующих значений при $\beta_{22}^0 > \beta_{11}^0$. В изотропных телах, когда $\beta_{11}^0 = \beta_{22}^0$, максимальные значения напряжений находятся между соответствующими значениями при $\beta_{11}^0 > \beta_{22}^0$ и $\beta_{22}^0 > \beta_{11}^0$. Таким образом, в тех случаях, когда целесообразно в теле иметь небольшие значения напряжений, необходимо анизотропный материал ориентировать так, чтобы по направлению s коэффициент упругости β_{11} был больше, чем коэффициент упругости по направлению n .

3. В случае краевого нагружения (рис.3) получаем следующие распределения компонентов тензора напряжений с точностью $o(\lambda)$:

$$\sigma_{ss} = 0, \quad \sigma_{nn} = \frac{1}{H^2} \left[a_0 + \frac{\lambda}{2} d_1 s^2 \right], \quad \sigma_{sn} = \frac{Ks}{H^2} \left[a_0 + \frac{\lambda}{6} d_1 s^2 \right]. \quad (18)$$

Как видно, эти напряжения тоже не зависят от характеристик материала.

4. При краевом напряжении (рис.4) распределения напряжений с точностью $O(\lambda)$ получаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ss} = 0, \quad \sigma_{nn} &= \frac{a_0}{H^2} + \frac{Ks}{\lambda h H} (b_0 + \lambda c_1), \\ \sigma_{sn} &= \frac{K}{H^2} [a_0 s + \eta (b_0 + \lambda c_1)] - \frac{1}{\lambda h H} (b_0 + \lambda c_1). \end{aligned} \quad (19)$$

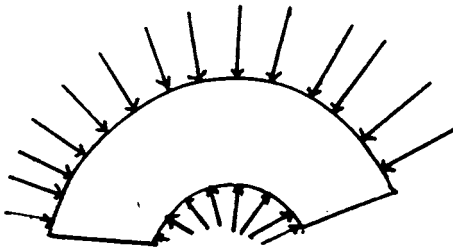


Рис. 3.

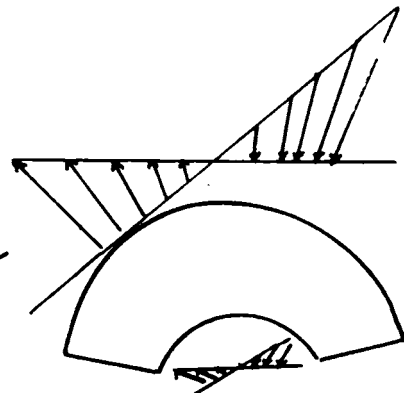


Рис. 4.

В этом случае тоже напряжения не зависят от характеристик материала.

5. Еще одно, представляющее собой интерес, плоское граничное нагружение двумерной области приведено на рис.5.

В этом случае получаем следующие распределения напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{ss} &= \frac{1}{\lambda^2 h^2} \left\{ d_0 \eta + c_0 s + \lambda \left[\frac{1}{6\beta_{11}^0} (N_7 \eta^3 + 3N_8 \eta^2 + d_1 \eta + c_1 s) \right] \right\}, \\ \sigma_{nn} &= \frac{1}{H^2} \left\{ b_0 \eta + a_0 + \lambda (b_1 \eta + a_1) + \frac{K}{\lambda h H} \left[\frac{d_0}{2} \eta^2 + c_0 s \eta + \frac{a_0}{2} s^2 \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \left[\frac{1}{24\beta_{11}^0} (N_7\eta^4 + 4N_8\eta^3) + \frac{d_1}{2}\eta^2 + c_1s\eta + \frac{a_1}{2}s^2 \right] \Big\}, \\
\sigma_{sn} = & \frac{K}{H^2} \left\{ \frac{c_0}{2}\eta^2 + b_0s\eta + a_0s + \lambda \left[\frac{c_1}{2}\eta^2 + b_1s\eta + a_1s \right] - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\lambda h H} [c_0\eta + b_0s + \lambda(c_1\eta + b_1s)] \right\}.
\end{aligned} \tag{20}$$

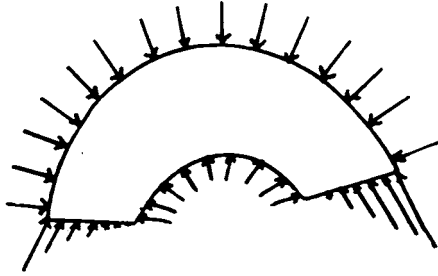


Рис. 5.

Здесь компоненты напряжений зависят от характеристик материалов.

§2. Слабое неоднородное анизотропное тело. В этом параграфе рассмотрим плоскую задачу для тел, изготовленных из слабо неоднородных материалов, т.е. в законе Гука (4) коэффициенты упругости β_{ij} переменны и задаются следующим образом:

$$\beta_{ij}(s,n) = \beta_{ij}^0 [1 + \delta f_{ij}(s,n)], \quad |\delta f_{ij}| < 1, \tag{21}$$

где $0 < \delta < 1$ — малый физический параметр, $\beta_{ij}^0 = \text{Const}$ характеризуют анизотропные свойства материала, $f_{ij}(s,n)$ — функции, характеризующие свойства неоднородности материала тела.

Уравнение, которому должна удовлетворять функция напряжений F , здесь имеет вид

$$\Pi[F] + \delta L[F] = 0, \tag{22}$$

где оператор $\Pi[]$ совпадает с оператором, фигурирующим в уравнении (5),

$$\begin{aligned}
L \equiv & \left[\frac{1}{H^2} \left(2\beta_{22}^0 \frac{\partial f_{22}}{\partial s} - H\beta_{26}^0 \frac{\partial f_{26}}{\partial n} \right) + \lambda_{11} \right] \frac{\partial^3}{\partial s^3} + \left[\left(2\beta_{12}^0 \frac{\partial f_{12}}{\partial n} - \frac{2\beta_{26}^0}{H} \frac{\partial f_{26}}{\partial s} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \beta_{66}^0 \frac{\partial f_{16}}{\partial n} \right) + \lambda_{21} \right] \frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial n} + \left[\left(2\beta_{12}^0 \frac{\partial f_{12}}{\partial s} - 3H\beta_{16}^0 \frac{\partial f_{16}}{\partial n} + \beta_{66}^0 \frac{\partial f_{66}}{\partial s} \right) + \lambda_{31} \right] \frac{\partial^3}{\partial s \partial n^2} \\
& + \left[H^2 \left(2\beta_{11}^0 \frac{\partial f_{11}}{\partial n} - \frac{\beta_{16}^0}{H} \frac{\partial f_{16}}{\partial s} \right) + \lambda_{41} \right] \frac{\partial^3}{\partial n^3} + \left[\left(\beta_{12}^0 \frac{\partial^2 h_2}{\partial n^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\beta_{22}^0}{H^2} \frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2} - \frac{\beta_{26}^0}{H} \frac{\partial^2 f_{26}}{\partial s \partial n} \right) + \lambda_{51} \right] \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left[\frac{1}{H} \left(\beta_{26}^0 \frac{\partial^2 f_{26}}{\partial s^2} + H^2 \beta_{16}^0 \frac{\partial^2 f_{16}}{\partial n^2} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -H\beta_{66}^0 \frac{\partial^2 f_{66}}{\partial s \partial n} + \lambda_{61} \left] \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \left[\left(\beta_{12}^0 \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial s^2} + H^2 \beta_{11}^0 \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial n^2} - H\beta_{16}^0 \frac{\partial^2 f_4}{\partial s \partial n} \right) + \right. \\
& + \lambda_{71} \left. \right] \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \lambda_{81} \frac{\partial}{\partial s} + \lambda_{91} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\beta_{22}^0}{H^2} f_{22} \frac{\partial^4}{\partial s^4} - \frac{2\beta_{26}^0}{H} f_{26} \frac{\partial^4}{\partial s^3 \partial n} + \left[2\beta_{12}^0 f_{12} + \right. \\
& \left. + \beta_{66}^0 f_{66} \right] \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial n^2} - 2H\beta_{16}^0 f_{16} \frac{\partial^4}{\partial s \partial n^3} + \beta_{11}^0 H^2 f_{11} \frac{\partial^4}{\partial n^4}.
\end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (22) представим в виде ряда по степеням малого параметра δ :

$$F(s, \eta) = \bar{F}_0(s, \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i F_i(s, \eta). \quad (23)$$

Из (22), (23) получим рекуррентную систему дифференциальных уравнений:

$$\Pi[\bar{F}_0] = 0, \quad (24)$$

$$\Pi[\bar{F}_i] = -L_i[F_{i-1}] \quad (i=1, 2, \dots).$$

Для решения первого уравнения системы (24), как и в случае однородных тел, функцию \bar{F}_0 разложим в ряд по малому геометрическому параметру

$$\bar{F}_0 = F_{00} + \lambda F_{01} + \lambda^2 F_{02} + \dots \quad (25)$$

Функции F_{0i} ($i=0, 1, 2, \dots$) удовлетворяют рекуррентной системе уравнений (7) (необходимо заменять F_1 через функции F_{0i}). Таким образом, можно определить с любой точностью решение \bar{F}_0 .

После нахождения функции \bar{F}_0 из второго уравнения (24) при $i=1$ можем найти \bar{F}_1 , и т.д. Для этого функцию \bar{F}_1 тоже разложим в ряд

$$\bar{F}_1 = F_{10} + \lambda F_{11} + \lambda^2 F_{12} + \dots \quad (26)$$

Функции F_{1i} ($i=0, 1, 2, \dots$) также удовлетворяют рекуррентной системе (7), меняется только первое уравнение:

$$A_0[F_{k0}] = -L[\bar{F}_{k-1}]. \quad (27)$$

Пусть заданы функции f_{1j} :

$$f_{1j}(s, n) = \alpha_{1j1}s + \alpha_{1j2}n, \quad \alpha_{1j\mu}; \alpha_{1j2} = \text{const}. \quad (28)$$

Рассмотрим конкретные краевые задачи. При краевых условиях, изображенных на рис.1, получим функцию \bar{F}_0 , которая совпадает с функцией (14). Функцию \bar{F}_1 получим в виде

$$\bar{F}_1(s, \eta) = \frac{a_{10}}{2}s^2 + b_{10}s\eta + \frac{c_{10}}{2}\eta^2 + \frac{\lambda}{24\beta_{11}^0} N_1 \eta^4. \quad (29)$$

Функция напряжений и компоненты тензора напряжений получаются с точностью $O(\lambda)$, $O(\delta)$:

$$F(s, \eta) = \frac{a_0}{2}s^2 + b_0s\eta + \frac{c_0}{2}\eta^2 + \frac{\lambda}{24\beta_{11}^0} N_1 \eta^4 + \delta \left[\frac{a_{10}}{2}s^2 + b_{10}s\eta + \right.$$

$$+ \frac{c_{10}}{2} \eta^2 + \frac{\lambda}{24\beta_{11}^0} N_1^*(s) \eta^4 \Big],$$

$$\sigma_{ss} = 0,$$

$$\sigma_{nn} = \frac{1}{H^2} (a_0 + \delta a_{10}) + \frac{K}{\lambda h N} (b_0 s + \delta b_{10} s),$$

$$\sigma_{sn} = \frac{Ks}{H^2} (a_0 + \delta a_{10}) - \frac{1}{\lambda h N} (b_0 + \delta b_{10}).$$

В табл.2 приведены максимальные значения этих напряжений, которые как и в однородном случае не зависят от характеристик материала.

Сравнивая результаты табл.2 с соответствующими результатами однородного тела, обнаруживаем, что при параметре $a_0 = 2 \cdot 10^5$ в неоднородном теле максимальные напряжения σ_{nn} и σ_{sn} увеличиваются соответственно на 5% и 20%, а при $a_{10} = 2 \cdot 10^5$ эти значения уменьшаются на 20%.

Таблица 2

	$(\sigma_{ss})^{\max}$ $\cdot 10^{-5} \text{Па}$	$ \sigma_{nn} ^{\max}$ $\cdot 10^{-5} \text{Па}$	$ \sigma_{sn} ^{\max}$ $\cdot 10^{-5} \text{Па}$	
анизотропный случай	0	2.4	8.4	$a_0 = a_{10} = 2 \cdot 10^5$
неоднородный случай	0	1.6	6.4	$a_0 = 2 \cdot 10^5$ $a_{10} = -2 \cdot 10^5$

Таблица 3

анизотропный неоднородный случай	$ \sigma_{ss} ^{\max}$ $\cdot 10^{-5} \text{Па}$	$(\sigma_{sn})^{\max}$ $\cdot 10^{-5} \text{Па}$	$ \sigma_{nn} ^{\max}$ $\cdot 10^{-5} \text{Па}$	Приращение относительно однородного материала	
				$\sigma_{ss} \%$	$\sigma_{nn} \%$
$\beta_{11}^0 = 1.4 \cdot 10^{10} \text{Па}$	2.1944	0	0.1026	8.7	8.8
$\beta_{22}^0 = 0.9 \cdot 10^{10} \text{Па}$	1.7944	0	0.0845	-11	-10.3
$\beta_{11}^0 = 0.9 \cdot 10^{10} \text{Па}$	2.2197	0	0.1032	8.7	8.8
$\beta_{22}^0 = 1.4 \cdot 10^{10} \text{Па}$	1.8197	0	0.1085	-10.8	-10.3
$\beta_{11}^0 = 2.2 \cdot 10^{10} \text{Па}$	2.192	0	0.1033	8.7	9.6
$\beta_{22}^0 = 1.3 \cdot 10^{10} \text{Па}$	1.792	0	0.085	-10.7	-9.7
$\beta_{11}^0 = 1.3 \cdot 10^{10} \text{Па}$	1.226	0	0.1025	8.7	7.8
$\beta_{22}^0 = 2.2 \cdot 10^{10} \text{Па}$	1.826	0	0.0843	-11	-11.2

Для случая нагружений при материале (28) (рис.2) максимальные значения компонентов напряжений приведены в табл.3. Эти значения зависят от характеристик β_{1j}^0 . Сравнения соответствующих значений в табл.1 и 3 показывают, что $|\sigma_{\text{вн}}|^{\text{max}}$ и $|\sigma_{\text{пл}}|^{\text{max}}$ уменьшаются для неоднородного тела при параметре $c_{10} = -10^5$ на 11% и 11,2% относительно однородного тела, а эти же величины увеличиваются на 8,7% и 9,6% при $c_{10} = 10^5$.

Как в случае однородных материалов, так и здесь сохраняется следующее свойство: максимальные значения напряжений при $\beta_{11}^0 > \beta_{22}^0$ меньше соответствующих значений при $\beta_{22}^0 > \beta_{11}^0$.

Кафедра механики
сплошной среды

Поступила 1.06.1990

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ер.:Изд-во ЕГУ, 1976.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.:Наука, 1975.

Ա մ փ ո ւ ր ն մ

Հոդվածում քառամասիրվում է երկարավուն լայնական հատույթ ունեցող անիզոտրոպ, անհամասեռ մարմինների հարթ խնդիրը: Ներմուծելով երկրաչափական փոքր պարամետր, ստանում ենք համասեռ մարմնի հարթ դեֆորմացիոն վիճակին համապատասխանող լարումների բաշխման օրենքները: Դիտարկվում են մասնավոր եզրային խնդիրներ, որոնցում ստացվում են թվային արդյունքներ: Հետազոտվում է նաև անհամասեռ, անիզոտրոպ նյութից պատրաստված երկարավուն մարմինների հարթ դեֆորմացիոն վիճակը: Այստեղ ներմուծվում են երկրաչափական և ֆիզիկական փոքր պարամետրեր, խնդրի ընդհանուր լուծումը տրվում է կրկնակի շարքերի միջոցով: Որոշ մասնավոր եզրային խնդիրներում լուծումները ներկայացվում են թվային արդյունքներով:

SUMMARY

The paper is devoted to the solution of two dimensional problems in curvilinear coordinates, when these bodies are homogeneous and nonhomogeneous with elongated cross section.

Some problems are considered using the method of small geometrical parameters.