

Механика

УДК 532.516

Р. Ж. МНАЦАКАНЯН

О РАЗВИТИИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ
ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ДВИЖУЩИМИСЯ ПОРИСТЫМИ
ПОЛУПЛОСКОСТЯМИ

В статье рассматривается течение вязкой жидкости в плоской трубе с движущимися пористыми стенками. Задача решается с помощью функционального преобразования Лапласа.

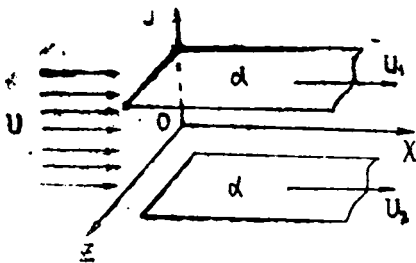
Найдены законы изменения скорости и давления вдоль трубы, а также длина участка просачивания жидкости.

За последние годы опубликован ряд работ [1—3], в которых рассматриваются задачи о тепловом и динамическом взаимодействии потока жидкости или газа с подвижными сплошными поверхностями. В последнее время, когда появился ряд актуальных приложений данной проблемы к современной технологии, возрастает интерес к изучению развития течения жидкости в трубах с движущейся пористой стенкой.

Движение пористых плоскостей относительно обтекающего потока имеет место в различных процессах химической технологии, в металлургии и т. д.

Изучение течения жидкости в трубах с подвижными пористыми поверхностями имеет большое теоретическое и практическое значение.

Рассмотрим задачу о развитии течения жидкости между параллельными движущимися пористыми полуплоскостями, простирающимися в направлении осей X и Z до бесконечности (см. рис.). На рисунке показано модельное устройство, во многом подобное реальным рабочим камерам установок для непрерывной термообработки плоских материалов.



Движение плоскостей происходит в собственных плоскостях. Обе плоскости движутся или по положительному или по отрицательному направлению оси OX с заданными постоянными скоростями U_1 и U_2 . Между плоскостями движется жидкость, для которой на входе в канал формируется плоский однородный профиль скорости.

Если предположить вязкую жидкость несжимаемой, а ее движение — установившимся и плоско-параллельным, то приближенные уравнения с частичным учетом слагаемых от ускорения и вязкости будут представляться в виде [4]

$$U \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

В этой системе уравнений U —есть средняя скорость основного потока по сечению в начале трубы, v_x и v_y —соответствующие скорости по сям Ox и Oy , p —давление, ρ —плотность, ν —кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Пусть расстояние между плоскостями будет $2h$. Если начало оси Oy возьмем на средней линии между плоскостями, то граничные условия для поставленной задачи будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad v_x &= U = \text{const}, \quad p = p_n = \text{const}; \\ \text{при } y=h \quad x > 0, \quad v_x &= U_1, \quad v_y = \frac{U}{U_1 + U} \alpha (p - p_b); \\ \text{при } y=-h \quad x > 0, \quad v_x &= U_2, \quad v_y = -\frac{U}{U_2 + U} \alpha (p - p_b). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь p_n —давление во входном сечении, p_b —внешнее давление, α —коэффициент, показывающий степень проницаемости стенок трубы (α и p_b принимаются постоянными).

Уравнение (1) при граничных условиях (2) решаем с помощью операционного исчисления.

Если воспользоваться функциональным преобразованием Лапласа, т. е. положить

$$\bar{v}_x = \int_0^\infty e^{-\lambda x} v_x dx, \quad \bar{v}_y = \int_0^\infty e^{-\lambda x} v_y dx, \quad \bar{p} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} (p - p_b) dx,$$

то из (1) и (2) получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{v}_x}{dy^2} - \frac{\lambda U}{\nu} \bar{v}_x &= \frac{1}{\mu} (\lambda \bar{p} + p_b - p_n - \rho U^2), \\ \frac{d \bar{v}_y}{dy} &= -(\lambda \bar{v}_x - U), \quad \frac{d \bar{p}}{dy} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{при } y=h \quad x > 0, \quad \bar{v}_x &= \frac{U_1}{\lambda}, \quad \bar{v}_y = \frac{U}{U_1 + U} \alpha \bar{p}; \\ \text{при } y=-h \quad x > 0, \quad \bar{v}_x &= \frac{U_2}{\lambda}, \quad \bar{v}_y = -\frac{U}{U_2 + U} \alpha \bar{p}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решения уравнений (3) при граничных условиях (4) будут представляться в виде

$$\bar{v}_x = \frac{U - \frac{\alpha B}{2\lambda h} (p_n - p_b + \rho U^2) - \frac{U_1 + U_2}{2} \frac{thkh}{kh}}{\lambda \left(1 - \frac{\alpha B \rho U}{2\lambda h} - \frac{thkh}{kh} \right)} \left(1 - \frac{chky}{chkh} \right) \cdot$$

$$+ \frac{U_1 \operatorname{sh} k(y+h)}{\lambda \operatorname{sh} 2kh} - \frac{U_2 \operatorname{sh} k(y-h)}{\lambda \operatorname{sh} 2kh}, \quad (5)$$

$$\bar{p} - \frac{p_a}{\lambda} + \frac{p_b}{\lambda} = \frac{\frac{\alpha B \rho U}{2\lambda h} (p_a - p_b) + \left[\frac{\rho U (U_1 + U_2)}{2} - \rho U^2 \right] \frac{thkh}{kh}}{\lambda \left(1 - \frac{\alpha B \rho U}{2\lambda h} - \frac{thkh}{kh} \right)}, \quad (6)$$

где

$$B = \frac{U}{U_1 + U} + \frac{U}{U_2 + U}, \quad k^2 = \frac{\lambda U}{\nu}.$$

Подставляя в (5) и (6) два члена разложения

$$thkh = kh - \frac{1}{3} k^3 h^3 + \frac{2}{15} k^5 h^5 - \dots,$$

получаем следующие приближенные выражения изображений:

$$\begin{aligned} \bar{v}_x = \frac{3}{2} U \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \frac{\lambda h \left(U - \frac{U_1 + U_2}{2} \right) - \alpha (p_a - p_b + \rho U^2)}{U h \left(\lambda^2 - \frac{3\mu B \alpha}{2h^2} \right)} + \\ + \frac{U_1}{2\lambda h} (y+h) - \frac{U_2}{2\lambda h} (y-h), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{p} = \frac{\lambda \left[p_a - p_b + \rho U^2 - \frac{\rho U (U_1 + U_2)}{2} \right] + \frac{3\mu}{h^2} \left(\frac{U_1 + U_2}{U} - U \right)}{\lambda^2 - \frac{3\mu B \alpha}{2h^2}}. \quad (8)$$

Отсюда для оригиналов на достаточно большом удалении от входа получим

$$\begin{aligned} v_x = \frac{3}{2} U \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \left[\left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \operatorname{ch} \lambda_1 x - \frac{\alpha B}{2\lambda_1 U h} (p_a - p_b + \rho U^2) \operatorname{sh} \lambda_1 x \right] + \\ + \frac{U_1}{2h} (y+h) - \frac{U_2}{2h} (y-h), \end{aligned} \quad (9)$$

$$p = p_b + (p_a - p_b + \rho U^2) \operatorname{ch} \lambda_1 x + \frac{3\mu}{\lambda_1 h^2} \left(\frac{U_1 + U_2}{2} - U \right) \operatorname{sh} \lambda_1 x,$$

где

$$\lambda_1^2 = \frac{3\mu B \alpha}{2h^2}.$$

Если в (9) положить $U_1 = U_2 = 0$, то получим значения v_x и p работы [4]. Обозначим через l длину просачивания, на которой давление p больше p_b . Для этой длины l из (9) получим следующее приближенное значение:

$$\operatorname{th}\lambda_1 l = \frac{\lambda_1 h^2 (\rho_n - \rho_b + \rho U^2)}{3\mu \left(U - \frac{U_1 + U_2}{2} \right)}. \quad (10)$$

Обозначая через λ^* значение, соответствующее двум действительным корням уравнения

$$1 - \frac{\alpha B \rho U}{2\lambda h} - \frac{\operatorname{th}kh}{kh} = 0,$$

а через γ_n — действительные корни уравнения $\operatorname{tg}\gamma = \gamma + \frac{\beta}{\gamma}$ полагая

$$\beta = \frac{\alpha \rho U^2 B h}{2\nu}, \quad \operatorname{Re} = \frac{U h}{\nu}$$

и применяя к выражениям (5) и (6) обратное преобразование Лапласа, получим следующие выражения для оригиналов:

$$\begin{aligned} v_x = 2Ue^{\lambda^* x} & \frac{\beta \left(1 + \frac{\rho_n - \rho_b}{\rho U^2} - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) - \frac{\lambda^* U h^2}{\nu} \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right)}{\left(\frac{\lambda^* U h^2}{\nu} \right)^2 - \frac{2\beta \lambda^* U h^2}{\nu} + \beta^2 + \beta} \times \\ & \times \left(\frac{\operatorname{chy} \sqrt{\frac{\lambda^* U}{\nu}}}{\operatorname{chh} \sqrt{\frac{\lambda^* U}{\nu}}} - 1 \right) + 2U \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(- \frac{x}{\operatorname{Re} h} \gamma_n^2 \right) \times \\ & \times \frac{\beta \left(1 + \frac{\rho_n - \rho_b}{\rho U^2} - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) + \gamma_n^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right)}{\gamma_n^4 + 2\beta \gamma_n^2 + \beta^2 + \beta} \left(\frac{\cos \gamma_n y / h}{\cos \gamma_n} - 1 \right) + \\ & + \frac{U_1 - U_2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \pi n y / h}{n} \exp \left(- \frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x \right) + \\ & + \frac{U_1 (y+h)}{2h} - \frac{U_2 (y-h)}{2h}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p - p_b = 2\rho U^2 e^{\lambda^* x} & \frac{\beta \left(1 + \frac{\rho_n - \rho_b}{\rho U^2} - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) - \frac{\lambda^* U h^2}{\nu} \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right)}{\left(\frac{\lambda^* U h^2}{\nu} \right)^2 - \frac{2\beta \lambda^* U h^2}{\nu} + \beta^2 + \beta} + \\ & + 2\rho U^2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(- \frac{x}{\operatorname{Re} h} \gamma_n^2 \right) \frac{\beta \left(1 + \frac{\rho_n - \rho_b}{\rho U^2} - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) + \gamma_n^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right)}{\gamma_n^4 + 2\beta \gamma_n^2 + \beta^2 + \beta}. \quad (12) \end{aligned}$$

Чтобы давление в канале только убывало, необходимо потребовать выполнения неравенства

$$\beta \left(1 + \frac{p_a - p_b}{\rho U^2} - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) - \frac{\lambda^* U h^*}{\nu} \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) < 0. \quad (13)$$

Если положить в (12) $x=l$, $p_a - p_b = 0$, то получим уточненную формулу для длины участка просачивания.

Из формулы (10) видно, что с возрастанием скоростей движения плоскостей длина участка просачивания увеличивается.

Кафедра механики

Поступила 6.04.1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Антышев И. А., Жубрин С. В., Мотулевич В. П. Анализ течения в канале с движущейся стенкой.—ИФЖ, 1985, № 4, с. 592—597.
2. Бектурганов Е., Джаугаштин К. Е., Сакинов З. Б., Ярин А. Л. Струйное обтекание движущейся поверхности.—Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1981, № 3, вып. 1, с. 33—41.
3. Черный Г. Г. Пограничный слой на движущейся поверхности.—В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М.: Наука, 1974, с. 99—104.
4. Слезкин Н. А. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками.—ПММ, 1957, т. 21, № 4, с. 591.

Ա մ փ ն փ ու մ

Հողովածում քննարկվում է մածուցիկ հեղուկի շարժումը հարթ խողովակում, երբ խողովակի պատերը ծակոտկեն են և շարժվում են:

Խնդիրը լուծվում է Լապլասի ֆունկցիոնալ ձևափոխմամբ: Գտնված են արագության և ճնշման փոփոխման օրենքները ըստ խողովակի երկարության, ինչպես նաև հեղուկի դուրս հոսելու հատվածի երկարությունը:

SUMMARY

In the present article viscous liquid flow in the flat pipe with moving porous walls is considered.

The problem is solved by the help of Laplace functional transformation.

The laws of velocity and pressure changes along the pipe as well as the length of the liquid leak segment have been found.