ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1988 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

Э. Х. ГРИГОРЯН

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С КОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

В работе рассматривается задача для кусочно-однородной бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами. Пластина состоит из двух различных полубесконечных пластин. Стрингера находятся на разных сторонах линии разнородности, нормальны к ней, и конец одного из них расположен на этой линии. Пластина деформируется под действием вертикальных сил, приложенных к концам стрингеров. Задача с помощью метода факторизации и метода ортогональных многочленов Чебышева сводится к решению квазивполне регулярной совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений.

Пусть упругая кусочно-однородная пластина, составленная из двух полубесконечных пластин с различными упругими постоянными, усиленная двумя конечными стрингерами, находящимися на различных сторонах линии разнородности, деформируется силой приложенных к концам стрингеров. Стрингера перпендикулярны к линии разнородности, и конец одного из стрингеров расположен на этой линии. Относительно стрингеров принимается во внимание модель контакта по линии, т. е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка [1]. Имея в виду вышесказанное, уравнения равновесия стрингеров запишем в виде

$$\frac{dv^{(1)}(y)}{dy}=\frac{1}{E_1^{(s)}F}\int_y^a \tau(\eta)d\eta \quad (0<y<a), \tag{1}$$

$$\frac{dv^{(1)}(y)}{dy}=\frac{1}{E_2^{(s)}F}\int_y^{-b} \tau(\eta)d\eta \quad (-c<y<-b)$$

при условии

$$\int_0^a \tau(\eta)\,d\eta=P;\ \int_{-c}^{-b}\tau(\eta)\,d\eta=Q, \tag{1'}$$

где $\tau(y)$—интенсивность контактных тангенциальных сил; $v^{(1)}(y)$—перемещения точек стрингеров; F—площадь поперечного сечения стрингеров; P, Q—интенсивность сосредоточенных сил, действующих на концах стрингеров; $E_1^{(s)}$, $E_2^{(s)}$—модули упругости стрингеров.

С другой стороны, для вертикальных деформаций пластины имеем [2]

$$hl\frac{dv^{(2)}}{dy}(0, y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^a\left[\frac{1}{\eta-y} - \frac{A_1}{\eta+y} + \frac{A_2\eta(\eta-y)}{(\eta+y)^3}\right]\tau(\eta)d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{-b}\left[\frac{A_3}{\eta-y} + \frac{A_4\eta}{(\eta-y)^2}\right]\tau(\eta)d\eta \quad (0<y<\infty), \qquad (2)$$

$$hl_1\frac{dv^{(2)}}{dy}(0, y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{-b}\left[\frac{1}{\eta-y} - \frac{B_1}{\eta+y} + \frac{B_2\eta(\eta-y)}{(\eta+y)^3}\right]\tau(\eta)d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^a\left[\frac{B_3}{\eta-y} + \frac{B_4\eta}{(\eta-y)^2}\right]\tau(\eta)d\eta \quad (-\infty<y<0),$$

где h—толщина пластины,

$$l = \frac{8\mu}{3-\nu}, \qquad l_1 = \frac{8\mu_1}{3-\nu_1}.$$

$$A_1(p, \nu, \nu_1) = \frac{(3-\nu_1)[8-(1+\nu)(3-\nu)] - p[p(3-\nu)(1+\nu_1)+2(1-\nu)(1-\nu_1)](3-\nu)}{(3-\nu)[1+\nu+p(3-\nu)][3-\nu_1+p(1+\nu_1)]},$$

$$A_2(p, \nu) = \frac{2(1-p)(1+\nu)^2}{(3-\nu)[1+\nu+p(3-\nu)]},$$

$$A_3(p, \nu, \nu_1) = \frac{8[3-\nu_1+p(3-\nu)]}{(3-\nu)[1+\nu+p(3-\nu)][3-\nu_1+p(1+\nu_1)]},$$

$$A_4(p, \nu, \nu_1) = \frac{8[p(1+\nu_1)(1-\nu)-(1+\nu)(1-\nu_1)]}{(3-\nu)[1+\nu+p(3-\nu)][3-\nu_1+p(1+\nu_1)]};$$

$$B_1 = A_1\left(\frac{1}{p}, \nu_1, \nu\right), \quad B_2 = A_2\left(\frac{1}{p}, \nu_1\right), \quad B_3 = A_3\left(\frac{1}{p}, \nu_1, \nu\right),$$

$$B_4 = A_4\left(\frac{1}{p}, \nu_1, \nu\right), \quad p = \frac{\mu_1}{\mu},$$

μ_1, μ—модули сдвига, а ν, ν_1—коэффициенты Пуассона материалов полубесконечных пластин.

Тогда, имея в виду (1), (2) и удовлетворив условиям контакта

$$v^{(1)}(y) = v^{(2)}(0, y) \text{ при } 0<y<a; \quad -c<y<-b,$$

после некоторых выкладок получим следующие уравнения:

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{\eta-y}-\frac{A_1}{\eta+y}+\frac{A_2\eta(\eta-y)}{(\eta+y)^3}\right]\tau^-(a\eta)d\eta=$$

$$(0<y<\infty)$$

$$=\lambda_1\left[\int_0^\infty\theta(\eta-y)\tau^-(a\eta)\,d\eta\right]\theta(1-y)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{11}^-(y,\ \eta)\psi(\eta)d\eta+g^+(y), \quad (3)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\eta)d\eta}{\eta-y}=\lambda_2\int_{-1}^{y}\psi(\eta)d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{21}(y,\ \eta)\psi(\eta)d\eta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1 K_{22}(y,\ \eta)\tau(a\eta)d\eta \quad (-1<y<1), \quad (4)$$

где $\theta(u)$—функция Хевисайда,

$$\psi(\eta)=\tau\left[\frac{(b-c)\eta-b-c}{2}\right],\quad \tau^-(ay)=\theta(1-y)\tau(ay),\quad K_{11}^-(y,\ \eta)=$$

$$=\theta(1-y)K_{11}(y,\ \eta),\quad g^+(y)=\frac{hl}{a}\frac{dv^{(1)}(y)}{dy}\theta(y-1),\quad \lambda_1=\frac{hla}{E_1^{(s)}F},$$

$$\lambda_2=\frac{hl_1(c-b)}{2E_2^{(s)}F},\quad K_{11}(y,\ \eta)=-\frac{A_3}{\eta+\gamma_1 y+\gamma_0}-\frac{A_4(\eta+\gamma_0)}{(\eta+\gamma_1 y+\gamma_0)^2},$$

$$K_{21}(y,\ \eta)=\frac{B_1}{\eta+y+2\gamma_0}-\frac{B_2(\eta-y)(\eta+\gamma_0)}{(\eta+y+2\gamma_0)^3},$$

$$K_{22}(y,\ \eta)=-\frac{B_3}{\eta+\gamma_1^{-1}y+\gamma_2}-\frac{B_4\eta}{(\eta+\gamma_1^{-1}y+\gamma_2)^2},$$

$$\gamma_0=\frac{c+b}{c-b},\quad \gamma_1=\frac{2a}{c-b},\quad \gamma_2=\frac{b+c}{2a}.$$

Таким образом, как следует из (3) при $0<y<1$, задача сводится к решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с неподвижной особенностью в нуле.

Руководствуясь идеей работы [3], обратим левую часть (3), считая правую—известной. Для этого сделаем замену переменных $\eta=e^u$, $y=e^v$ и применим к (3) интегральное преобразование Фурье. В итоге получим

$$\overline{K}(\alpha)\overline{\tau}_1^-(\alpha)=-\frac{\lambda_1}{\alpha}\overline{\tau}_1^-(\alpha-i)+\overline{f}^-(\alpha)+\overline{g}_1^+(\alpha) \qquad (-1<\mathrm{Im}\alpha<-n_0), \quad (5)$$

где

$$\overline{K}(\alpha)=\frac{\mathrm{ch}\pi\alpha-A_1-A_2(\alpha+1)^2}{\mathrm{sh}\pi\alpha},\quad \alpha_1=-in_0,\ \overline{K}(\alpha_1)=0,$$

$$\bar{f}^{-}(\alpha)=\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\bar{K}_{11}^{-}(\alpha,\ \eta)\psi(\eta)d\eta,$$

$$\bar{K}_{11}^{-}(\alpha,\eta)=\int_{0}^{1}K_{11}(y,\ \eta)y^{i\alpha-1}dy=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m}\frac{\partial^{m}}{\partial y^{m}}K_{11}(y,\eta)\Big|_{y=1}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(i\alpha)}{\Gamma(1+m+i\alpha)}-(-1)^{n}\frac{\Gamma(i\alpha)}{\Gamma(1+n+i\alpha)}\int_{0}^{1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}}K_{11}(y,\ \eta)y^{i\alpha+n}dy \qquad (6)$$

$$(\operatorname{Im}\alpha<0),$$

$\Gamma(u)$—известная гамма-функция, $\bar{\tau}_1^{-}(\alpha)$ и $\bar{g}_1^{+}(\alpha)$ являются трансформантами Фурье функций $\tau_1^{-}(u)=\tau^{-}(ae^{u})$, $g_1^{+}(u)=-ig^{+}(e^{u})$—соответственно.

Функциональное уравнение (5) решается методом, изложенным в [3, 4, 5], но $\bar{K}(\alpha)$ факторизуется иначе, т. е. решение уравнения (5) имеет вид

$$\bar{\tau}_1^{-}(\alpha)=\frac{a_0}{\bar{K}^{-}(\alpha)}-\lambda_1\frac{\bar{\varphi}^{-}(\alpha)}{\bar{K}^{-}(\alpha)}-\frac{\bar{F}^{-}(\alpha)}{\bar{K}^{-}(\alpha)}-\frac{\lambda_1 Pa^{-1}+f_0}{\alpha\bar{K}^{-}(\alpha)\bar{K}^{+}(0)}$$

$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<-n_0), \qquad (7)$$

$$\bar{g}_1^{+}(\alpha)=a_0\bar{K}^{+}(\alpha)+\lambda_1\bar{K}^{+}(\alpha)\bar{\varphi}^{+}(\alpha)+\bar{K}^{+}(\alpha)\bar{F}^{+}(\alpha),$$

где a_0—неизвестная постоянная,

$$\bar{K}(\alpha)=\bar{K}^{+}(\alpha)\bar{K}^{-}(\alpha)\quad(-1<\operatorname{Im}\alpha<-n_0),$$

$$\bar{K}^{+}(\alpha)=\frac{\bar{M}^{+}(\alpha)}{\bar{L}^{+}(\alpha)},\quad \bar{K}^{-}(\alpha)=\frac{\bar{M}^{-}(\alpha)}{\bar{L}^{-}(\alpha)},$$

$$\bar{M}^{+}(\alpha)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)},\quad \bar{M}^{-}(\alpha)=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\bar{L}^{-}(\alpha)=\exp[\bar{R}^{-}(\alpha)],\quad \bar{L}^{+}(\alpha)=\exp[-\bar{R}^{+}(\alpha)],$$

$$R(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\bar{R}(\alpha)e^{-i\alpha u}d\alpha,\quad \bar{R}(\alpha)=\bar{R}^{-}(\alpha)+\bar{R}^{+}(\alpha)=\ln G(\alpha),$$

$$\bar{R}^{-}(\alpha)=\int_{-\infty}^{0}R(u)e^{i\alpha u}du,\quad \bar{R}^{+}(\alpha)=\int_{0}^{\infty}R(u)e^{i\alpha u}du,$$

$$G(\alpha)=\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha-A_1-A_2(\alpha+i)^2}{\operatorname{ch}\pi\alpha-1},\quad \bar{F}(\alpha)=\bar{F}^{-}(\alpha)+\bar{F}^{+}(\alpha),$$

$$\bar{\varphi}(\alpha)=\bar{\varphi}^{-}(\alpha)+\bar{\varphi}^{+}(\alpha),$$

$$\bar{F}(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\cdot[\alpha\bar{f}^-(\alpha)[\bar{K}^+(\alpha)]^{-1}-f_0[\bar{K}^+(0)]^{-1}],$$

$$\bar{\varphi}(\alpha)=\frac{1}{\alpha}[\bar{\tau}_1^-(\alpha-i)[\bar{K}^+(\alpha)]^{-1}-\bar{\tau}_1^-(-i)[\bar{K}^+(0)]^{-1}], \tag{8}$$

$$\varphi(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\bar{\varphi}(\alpha)e^{-i\alpha u}d\alpha,\quad F(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\bar{F}(\alpha)e^{-i\alpha u}d\alpha,$$

$$\bar{\varphi}^-(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(u)e^{i\alpha u}du,\quad \bar{\varphi}^+(\alpha)=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(u)e^{i\alpha u}du,$$

$$\bar{F}^-(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{0}F(u)e^{i\alpha u}du,\quad \bar{F}^+(\alpha)=\int\limits_{0}^{\infty}F(u)e^{i\alpha u}du,$$

$$\bar{\tau}_1^-(-i)=\frac{P}{a},\quad f_0=\operatorname*{Res}_{\alpha=0}\bar{f}^-(\alpha)\quad(-1<\tau<-n_0).$$

Для дальнейшего отметим, что $\bar{\tau}_1^-(\alpha)\sim\alpha^{-1/2}$, $\bar{g}_1^+(\alpha)\sim\alpha^{-1/2}$, ввиду того, что $\tau_1^-(u)$; $g_1^+(u)\sim u_{\mp}^{-1/2}$ $(u_{\mp}^{-1/2}=\theta(\mp u)|u|^{-1/2})$ при $u\to\mp 0$; $\bar{\varphi}^{\pm}(\alpha)\sim\frac{1}{\alpha}\ln\alpha$, $\bar{F}^+(\alpha)\sim\alpha^{-1/2}$, $\bar{F}^-(\alpha)\sim\frac{1}{\alpha}$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности.

Если в (7) положить $\bar{F}^-(\alpha)\equiv 0$, $f_0=0$, получим выражение $\bar{\tau}_1^-(\alpha)$ той задачи, в которой рассматривается кусочно-однородная бесконечная пластина с выходящим на границу стрингером [6]. Этот частный случай рассматриваемой задачи обсуждался и в [7], где была показана нетеровость соответствующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения (3) $(0<y<1)$.

Далее, не останавливаясь на подробностях, отметим, что после вычислений интегралов (8) функции $\bar{K}^{\pm}(\alpha)$ будут даваться в виде бесконечных произведений

$$\bar{K}^+(\alpha)=e^{-\bar{R}^+(0)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{\alpha}{2i}\right)^2}{\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{\alpha}{\alpha_1+2i}\right)}\prod_{k=2}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{2ki}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\alpha_k+2i}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}_k-2i}\right)},$$

$$\bar{K}^-(\alpha)=-\frac{1}{2}e^{\bar{R}^-(-i)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{\alpha+i}{\alpha_1+i}\right)}{\Gamma\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\alpha\left(1-\frac{\alpha+i}{3i}\right)^2}\times$$

$$\times\prod_{k=2}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\alpha+i}{\alpha_k-i}\right)\left(1+\frac{\alpha+i}{\bar{\alpha}_k-i}\right)}{\left(1-\frac{\alpha+i}{(2k+1)i}\right)^2},$$

где α_k, $-\alpha_k$—являются нулями функции $K(\alpha)$, расположенными в порядке $0<\mathrm{Im}\alpha_k<\mathrm{Im}\alpha_{k+1}$ и $\mathrm{Re}\alpha_k>0$ $(k=2, 3, \dots)$, а $\bar{\alpha}_k$—это число, сопряженное к α_k. Причем.

$$\alpha_k=(2k-3)i+\frac{2}{\pi}\ln\left[\sqrt{2A_2}(2k-3)\right] \quad \text{при } k\to\infty.$$

Очевидно, что функции $\bar{\tau}_1^-(\alpha)$, $\bar{\varphi}^-(\alpha)$, $\bar{K}^-(\alpha)$, $\bar{F}^-(\alpha)$ регулярны при $\mathrm{Im}\alpha<-n_0$. Аналитическое продолжение функции $\bar{F}^-(\alpha)$, как следует из (6), имеет простые полюса в точках $\alpha=in$ $(n=1, 2, 3, \dots)$, а функции $\bar{\tau}_1^-(\alpha)$—в точках $\alpha_1=-in_0$, $\alpha=\alpha_1+in$, $\alpha=\alpha_k+in$, $\alpha=-\bar{\alpha}_k+in$ $(n=0, 1, \dots, k=2, 3, \dots)$ при $p\neq1$, в чем нетрудно убедиться, обсуждая функциональное уравнение (5). Функция $\bar{\varphi}^-(\alpha)$ имеет те же полюса, что и $\bar{\tau}_1^-(\alpha)$, кроме точек $\alpha=\alpha_1$, $\alpha=\alpha_k$ и $\alpha=-\bar{\alpha}_k$.

Из вышесказанного следует, что функции $\tau(ay)$, $\bar{\varphi}^-(\alpha)$, $\bar{F}^-(\alpha)$ имеют следующие представления:

$$\tau(ay)=i\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n b_{nm}y^{n-i\alpha_m}\right)m^{-\epsilon}X_m+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n \acute{b}_{nm}y^{n+i\bar{\alpha}_m}\right)m^{-\epsilon}Y_m\right], \tag{9}$$

$$\bar{\varphi}^-(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n\bar{K}^+(\alpha_m+in+i)}{\alpha-\alpha_m-in-i}b_{nm}\right)m^{-\epsilon}X_m+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_m+in+i)}{\alpha+\bar{\alpha}_m-in-i}\acute{b}_{nm}\right)m^{-\epsilon}Y_m\right], \tag{10}$$

$$\bar{F}^-(\alpha)=-\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha m}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\eta+\gamma_0}\left(\frac{\gamma_1}{\eta+\gamma_0}\right)^m\psi(\eta)d\eta, \tag{11}$$

где

$$I_{\alpha m}=\frac{(-1)^m[A_3-(m+1)A_4]}{\pi(\alpha-im)\bar{K}^+(im)}, \quad \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_0}<1,\ b_{0m}=\acute{b}_{0m}=1,$$

$$m^{-\epsilon}X_m=\operatorname*{Res}_{\alpha=\alpha_m}\bar{\tau}_1^-(\alpha),\quad m^{-\epsilon}Y_m=\operatorname*{Res}_{\alpha=-\bar{\alpha}_m}\bar{\tau}_1^-(\alpha)\quad\left(0<\epsilon<\frac{1}{2}\right),$$

$$(-\lambda_1)^n b_{nm}m^{-\epsilon}X_m=\operatorname*{Res}_{\alpha=\alpha_m+in}\bar{\varphi}_1^-(\alpha),\quad(-\lambda_1)^n\acute{b}_{nm}m^{-\epsilon}Y_m=\operatorname*{Res}_{\alpha=-\bar{\alpha}_m+in}\bar{\varphi}_1^-(\alpha),$$

$$b_{nm}=\prod_{p=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_m+ip)\bar{K}(\alpha_m+ip)},\quad \acute{b}_{nm}=\prod_{p=1}^{n}\frac{1}{(-\bar{\alpha}_m+ip)\bar{K}(-\bar{\alpha}_m+ip)}.$$

Выше имелось в виду, что

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=mi}\bar{K}_{11}^-(\alpha,\eta)=-\frac{i}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y^m}K_{11}(\eta, y)|_{y=0},$$

кроме того, полагалось, что все α_k комплексны. В случае мнимого α_k надо в выражениях (9), (10) поставить $Y_k=0$.

Далее, ищем $\psi(y)$ в виде [8]

$$\psi(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\sum_{n=0}^{\infty}A_n^*T_n(y),\quad T_n(y)=\cos(n\cdot\arccos y),$$

где $T_n(y)$—многочлены Чебышева первого рода, и подставим в (4) и в $\bar{F}^-(\alpha)$, при этом имея в виду формулу

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}=U_{n-1}(x),\quad U_{n-1}(x)=\frac{\sin(n\cdot\arccos x)}{\sin(\arccos x)},$$

где $U_{n-1}(x)$—многочлены Чебышева второго рода. Затем из (4) после умножения на $\sqrt{1-y^2}U_{n-1}(y)$ и из (7), при этом имея в виду (10), (11), получим искомую бесконечную систему алгебраических уравнений

$$A_k^*+\sum_{n=1}^{\infty}B_{kn}A_n^*+\sum_{n=1}^{\infty}(B_{kn}^{(1)}X_n+B_{kn}^{(2)}Y_n)=A_0\gamma_k,\tag{12}$$

$$X_k+\lambda_1k^\varepsilon\frac{\bar{K}^+(\alpha_k)}{\bar{K}'(\alpha_k)}\sum_{m=1}^{\infty}(R_{km}^{(1)}X_m+R_{km}^{(2)}Y_m)+k^\varepsilon\frac{\bar{K}^+(\alpha_k)}{\bar{K}'(\alpha_k)}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}L_{kn}A_n^*=a_0k^\varepsilon\frac{\bar{K}^+(\alpha_k)}{\bar{K}'(\alpha_k)}-A_0L_{k0}k^\varepsilon\frac{\bar{K}^+(\alpha_k)}{\bar{K}'(\alpha_k)}-$$

$$-k^\varepsilon\frac{(\lambda_1Pa^{-1}+f_0)\bar{K}^+(\alpha_k)}{\alpha_k\bar{K}^+(0)\bar{K}'(\alpha_k)}\qquad\left(\bar{K}'(\alpha)=\frac{d\bar{K}(\alpha)}{d\alpha}\right),\tag{13}$$

$$Y_k+k^\varepsilon\frac{\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_k)}{\bar{K}'(-\bar{\alpha}_k)}\sum_{m=1}^{\infty}(\bar{R}_{km}^{(1)}X_m+\bar{R}_{km}^{(2)}Y_m)+$$

$$+\lambda_1k^\varepsilon\frac{\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_k)}{\bar{K}'(-\bar{\alpha}_k)}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{L}_{kn}A_n^*=a_0k^\varepsilon\frac{\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_k)}{\bar{K}'(-\bar{\alpha}_k)}+$$

$$+k^\varepsilon\frac{(\lambda_1Pa^{-1}+f_0)\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_k)}{\bar{\alpha}_k\bar{K}^+(0)\bar{K}'(-\bar{\alpha}_k)}-k^\varepsilon L_{k0}A_0\frac{\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_k)}{\bar{K}'(-\bar{\alpha}_k)},\tag{14}$$

где

$$R_{km}^{(1)}=m^{-\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n\bar{K}^+(\alpha_m+in+i)}{\alpha_k-\alpha_m-in-i}b_{nm},$$

$$R_{km}^{(2)}=m^{-\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_m+in+i)}{\alpha_k+\bar{\alpha}_m-in-i}\bar{b}_{nm},$$

$$\bar{R}_{km}^{(1)}=-m^{-\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n\bar{K}^+(\alpha_m+in+i)}{\bar{\alpha}_k+\alpha_m+in+i}b_{nm},$$

$$\bar{R}_{km}^{(2)}=-m^{-\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_m+in+i)}{\bar{\alpha}_k-\bar{\alpha}_m+in+i}\bar{b}_{nm},$$

$$L_{k0}=\sum_{m=1}^{\infty} I_{\alpha_k,\,m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\eta+\gamma_0}\left(\frac{\gamma_1}{\eta+\gamma_0}\right)^m\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}},$$

$$L_{k1}=\sum_{m=1}^{\infty} I_{\alpha_k,\,m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1}{\eta+\gamma_0}\right)^{m+1}\frac{\eta d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}},$$

$$L_{kn}=\frac{1}{2n(1-n)}\sum_{m=1}^{\infty} I_{\alpha_k,\,m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d^2}{d\eta^2}\left[\frac{1}{\eta+\gamma_0}\left(\frac{\gamma_1}{\eta+\gamma_0}\right)^m\right]\sqrt{1-\eta^2}U_{n-1}(\eta)d\eta-$$

$$-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{m=1}^{\infty} I_{\alpha_k,\,m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d^2}{d\eta^2}\left[\frac{1}{\eta+\gamma_0}\left(\frac{\gamma_1}{\eta+\gamma_0}\right)^m\right]\sqrt{1-\eta^2}U_{n+1}(\eta)d\eta,$$

$$\gamma_k=\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}K_{21}(y,\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}-\lambda_2\pi\arccos y\right]\sqrt{1-y^2}U_{n-1}(y)dy,$$

$$B_{kn}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\lambda_2\int_{y}^{1}\frac{T_n(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{21}(y,\eta)\frac{T_n(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right]\sqrt{1-y^2}U_{n-1}(y)dy,$$

$$B_{kn}^{(1)}=\frac{\varphi_k}{n^2(1-I\alpha_n)}-B_{kno}^{(1)}+\sum_{m=1}^{\infty}B_{knm}^{(1)},$$

$$B_{kn}^{(2)}=\frac{\varphi_k}{n^2(1-I\alpha_n)}-B_{kno}^{(2)}+\sum_{m=1}^{\infty}B_{knm}^{(2)},$$

$$\varphi_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{22}(1,y)\sqrt{1-y^2}U_{k-1}(y)dy,$$

$$B_{kno}^{(1)}=\frac{1}{\pi n^2(1-I\alpha_n)}\left[\frac{1}{k-1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial^2K_{22}(y,\eta)}{\partial y\partial\eta}\eta^{1-I\alpha_n}\sqrt{1-y^2}\,U_{k-2}(y)dyd\eta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k+1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial^2K_{22}(y,\eta)}{\partial y\partial\eta}\eta^{1-I\alpha_k}\sqrt{1-y^2}\,U_{k+1}(y)\,dy\,d\eta\right],$$

$$B_{knm}^{(1)}=\frac{(-\lambda_1)^m b_{nm}}{\pi n^2}\left[\frac{1}{k-1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial K_{22}(y,\eta)}{\partial y}\eta^{m-I\alpha_n}\sqrt{1-y^2}\,U_{k-2}(y)dyd\eta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k+1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial K_{22}(y,\eta)}{\partial y}\eta^{m-I\alpha_n}\sqrt{1-y^2}\,U_{k+1}(y)dyd\eta\right],$$

а выражение $\dot{L}_{kn}$ получается из L_{kn}, если в них вместо $I_{\alpha_{k,m}}$ положить

$l_{-\bar{a}_k, m}$ $B_{kno}^{(2)}$—из $B_{kno}^{(1)}$, если в нем вместо α_k положить $-\dot{\alpha}_k$, и, наконец, $B_{knm}^{(2)}$ получается из $B_{knm}^{(1)}$, если вместо α_k положить $-\bar{\alpha}_k$, а вместо b_{nm}—$\bar{b}_{nm}$.

Заметим, что если в (13) и (14) положить $\{A_n\}^\infty_{n=2}=0$, то полученная совокупность бесконечных систем будет соответствовать задаче, когда стрингер на участке $(-c, -b)$ отсутствует, а при $p=0$—задаче полубесконечной пластины с выходящим к границе стрингером [8].

В случае мнимого корня α_j надо положить в (12), (13) $Y_j=0$ и не рассматривать (14) при $k=j$.

Ввиду того, что имеют место оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty}|R^{(1)}_{kno}|<\frac{C_1}{k},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|R^{(1)}_{knm}|<\frac{C_2}{k}\quad \text{при } k\to\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|B_{kn}|<\frac{C_3}{\sqrt{k}},\quad \left|\frac{\bar{K}^+(\alpha_k)}{\bar{K}'(\alpha_k)}\right|\leqslant\frac{C_4}{\sqrt{|\alpha_k|}}\quad \text{при } k\to\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|L_{kn}|<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|R^{(1)}_{kn}|<\infty,\quad \varphi_k\to 0 \text{ при } k\to\infty,$$

в которых нетрудно убедиться, следует квазипольная регулярность обсуждаемой системы уравнений.

Надо отметить, что для полного представления о законе распределения $\tau(ay)$ при $0<y<1$, помимо формулы (9), необходимо знать и асимптотическое поведение этой функции при $y\to 1$. Не вдаваясь в подробности непосредственно, приведем эту асимптотическую формулу

$$\tau(ay)=\frac{ia_0\sqrt{2}}{\sqrt{-\ln y}}+K_0\sqrt{-\ln y}+\frac{ia_0\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left(R_0+\frac{1}{6}+\frac{\lambda_1}{\pi}\right)\sqrt{-\ln y}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}\lambda_1\bar{\tau}_1(-1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\bar{K}^+(0)}\sqrt{-\ln y}+\frac{i\lambda_1 a_0\sqrt{2}}{\pi^2}\left[\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)\ln(-\lambda_1\ln y)\right]\sqrt{-\ln y}+O(\ln y)\quad \text{при } y\to 1,$$

где

$$R_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\pi\sigma+A_2\sigma^2+A_1}{\operatorname{ch}\pi\sigma+1}\right)d\sigma,\quad K_0=-\frac{4}{\pi\sqrt{2\pi}\,K^+(0)}\int_{-1}^{1}K_{11}(1,\eta)\psi(\eta)d\eta.$$

Постоянные a_0, A_0, f_0 определяются из условия

$$f_0=-\frac{1-A_1+A_2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\eta)d\eta}{\eta+\gamma_0},$$

и из (1′).

Кафедра механики сплошной среды *Поступила 8.09.1988*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Муки Р., Стернберг Э.** Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке.—Тр. Амер. общ. инж.-механиков, 1968, сер. Е, № 4.
2. **Григорян Э. Х., Оганисян Г. В.** Об одной контактной задаче для кусочно-однородной пластины с конечными стрингерами.—Межвуз. сб. науч. тр., Механика. Изд-во ЕГУ, 1984, № 3.
3. **Григорян Э. Х.** Об одной задаче для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение.—Уч. зап. ЕГУ, 1982, № 2.
4. **Крейн С. Г.** Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
5. **Григорян Э. Х.** Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.—Уч. зап. ЕГУ, 1979, № 3.
6. **Григорян Э. Х.** Задача для кусочно-однородной бесконечной пластины с конечным стрингером, выходящим на границу раздела сред.—Тезисы докл. III Всесоюзн. конферен. по смешанным задачам механики деформ. тверд. тела. Харьков, 1985.
7. **Кривой А. Ф., Попов Г. Я., Радиолло М. В.** Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости.—ПММ, 1986, № 4.
8. **Григорян Э. Х.** Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходяще на границу полуплоскости.—Межвуз. сб. науч. тр., Механика, Изд-во ЕГУ, 1987, № 6.

Ամփոփում

Դիտարկվում է երկու վերջավոր ստրինգերներով կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ սալի խնդիր։ Սալը բաղկացած է երկու տարբեր կիսահարթություններից։ Ստրինգերները գտնվում են բաժանման գծի տարբեր կողմերում, ուղղահայաց են նրան և նրանցից մեկի ծայրը գտնվում է այդ գծի վրա։ Սալը դեֆորմացվում է ստրինգերների ծայրերում կիրառված ուղղահայաց ուժերի ազդեցության տակ։ Խնդիրը ֆակտորիզացիայի և օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով բերվում է հանրահաշվական հավասարումների կվազիռեգուլյար համակարգի լուծմանը։

Summary

A problem for step-homogeneous infinite plate with two infinite stringers has been considered. The plate is made of two different half-infinite parts.The stringers are normally situated on different parts of the plate from boundary of separation. The edge of one stringer is on the boundary of separation. The plate is deformed under tangential forces acting at the edges of the stringers. By means of factorization and orthogonal polynoms method the problem is reduced to the solution of quazy-regular infinite system of algebraic equations.